

THESE

présentée à l'U.E.R. de Mathématiques de l'Université de Nantes

par

Jean-Claude DAUBISSE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR INGENIEUR

ETUDE DE CERTAINES METHODES
DE RESOLUTION NUMERIQUE D'EQUATIONS ALGEBRIQUES,
NOTAMMENT DANS LE CAS DE RACINES MULTIPLES OU VOISINES

Soutenue le 15 Juin 1972 devant la commission d'examen :

M. G. BRILLOUET

Président

M. J. LEGRAS

M. C. PAUC

M. J. VILAINE

} Examinateurs

THESE

présentée à l'U.E.R. de Mathématiques de l'Université de Nantes

par

Jean-Claude DAUBISSE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR INGENIEUR

ETUDE DE CERTAINES METHODES

DE RESOLUTION NUMERIQUE D'EQUATIONS ALGEBRIQUES,

NOTAMMENT DANS LE CAS DE RACINES MULTIPLES OU VOISINES

Soutenue le 15 Juin 1972 devant la commission d'examen :

M. G. BRILLOUET

Président

M. J. LEGRAS

M. C. PAUC

M. J. VILAINE

} Examineurs

THESE

Présentée à l'Université de Leiden

par

Mr. J. J. J. J.

LE SECRÉTAIRE DE L'UNIVERSITÉ

CLIQUE DE CERTAINES MATIÈRES

DE RECHERCHES NUMÉRIQUES D'ÉCHARTONNEMENT

NOTAMMENT DANS LE CAS DE FAUSSES MATIÈRES



Imprimé à Leiden le 15 Jan 1873

Mr. J. J. J. J.

Mr. J. J. J. J.
Mr. J. J. J. J.
Mr. J. J. J. J.

Table des matières

- INTRODUCTION	1
- CHAPITRE I - Généralités	8
- CHAPITRE II - Méthodes de Localisation	
A - Méthodes de LEHMER-SCHUR	16
B - Méthodes de MOTTELER	35
- CHAPITRE III - Méthodes à un point d'appui	
A - Méthodes du type NEWTON	46
B - Méthodes du type LAGUERRE	95
- CHAPITRE IV - Méthodes à plusieurs points d'appui	
A - Méthodes de MULLER	108
B - Méthodes d'ordre de convergence élevé	126
C - Méthodes générales de résolution (Extension de la méthode proposée par JARRATT-GARSTIDE-MACK)	136
D - Méthodes de résolution basées sur l'inter- polation	165
- CHAPITRE V - Méthode particulière	
Méthode de BAIRSTOW	179
- CHAPITRE VI - Comparaison des méthodes - Conclusions ...	194
- ANNEXES	204
- ANNEXE 1	205
- ANNEXE 2	229
- ANNEXE 3	244
- BIBLIOGRAPHIE	258

Ce travail a été fait sous la direction de Monsieur le Doyen BRILLOUET,

Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde gratitude pour ses nombreux conseils et pour l'intérêt qu'il m'a toujours porté.

Monsieur le Professeur LEGRAS, Monsieur le Professeur PAUC et Monsieur le Professeur VILAINE ont bien voulu me faire l'honneur de constituer le Jury,

Je les prie d'agréer l'expression de ma reconnaissance respectueuse.

Mes remerciements vont aussi à Madame CORNU qui s'est chargée du travail de dactylographie.

Introduction

Les premières études de résolution numérique des équations polynomiales remontent à fort longtemps. LANCZOS [31] en donne un bref historique. Le problème est cependant toujours d'actualité.

Des méthodes anciennes, comme celles de NEWTON ou BAIRSTOW, sont toujours utilisées, certaines ont été améliorées, d'autres généralisées au cas complexe ; enfin de nouvelles approches du problème ont été élaborées (LEHMER, RUTISHAUSER ...).

Chacune des méthodes existantes a son caractère propre. La résolution de polynômes bien conditionnés ne présente généralement pas de difficulté, il suffit de faire un choix parmi les méthodes existantes. Par contre, le cas des polynômes à coefficients quelconques et à racines multiples ou voisines pose toujours de nombreux problèmes.

Nous nous sommes particulièrement attachés à ce type de polynômes en essayant d'améliorer les méthodes existantes ou en élaborant des algorithmes dont l'ordre de convergence est indépendant de la multiplicité des racines cherchées. Nous verrons aussi qu'une étude des erreurs sur le calcul des racines multiples permettra d'améliorer très sensiblement la précision obtenue sur celles-ci (cf. généralités).

Nous pouvons considérer qu'il y a trois grandes catégories de méthodes de résolution d'équations polynômiales.

I - Méthodes déduites des méthodes de calcul des valeurs propres de matrices.

On associe une matrice au polynôme considéré. Il faut alors utiliser des méthodes de résolution spécifiques au calcul des valeurs propres, méthodes qui ne sont pas toujours adaptées à de telles matrices. Cette étude nous éloignant de notre objectif initial, n'a pas été entreprise.

II - Méthodes dites "globales"

Toutes les racines sont calculées en même temps. Généralement, nous avons un système d'équations à résoudre ; il est nécessaire de connaître un vecteur initial assez proche du vecteur solution et les racines doivent être simples et quelquefois réelles (cf. KERNER [25] , BRACHOLD [6] DURAND [13] , EHRLICH [15] ...).

Il faut aussi noter dans ce groupe, deux méthodes intéressantes, celle de GRAEFFE avec l'amélioration apportée par BAREISS [4] et celle du QD de RUTISHAUSER [46] complétée par HENRICI [16] . L'algorithme de BAREISS n'est pas trop affecté par la multiplicité des racines ; par contre, le QD qui est remarquable pour des racines simples bien distinctes ne permet pas toujours de séparer avec sécurité des racines voisines ou de déterminer des racines complexes multiples. Nous avons testé cette dernière méthode sur ordinateur et cependant, malgré quelques améliorations par rapport à HENRICI [17] , nous n'avons pu déterminer toutes les racines de certains polynômes .

De plus ces algorithmes ne sont applicables qu'à des polynômes à coefficients réels.

Nous avons aussi écarté ces méthodes qui ne nous ont pas semblé toujours adaptées au cadre que nous nous étions fixé .

III - Enfin, il existe les méthodes itératives permettant de déterminer

les racines l'une après l'autre. C'est ce dernier type d'algorithmes que nous avons plus particulièrement étudié. Nous avons testé différentes méthodes en essayant de les améliorer avec comme objectif principal le cas des racines multiples ou voisines. Nous avons ainsi pu mettre au point des méthodes utilisant l'ordre de multiplicité calculé des racines. Nous pourrions alors, dans certains cas, déterminer les racines multiples avec à peu près la même précision que des racines simples.

Ces méthodes itératives peuvent être classées en au moins quatre catégories :

1. Méthodes dites de localisation des racines.

Nous trouvons là les méthodes basées sur le principe de la "Steepest Descent" (cf. par exemple MOORE [35] et CLARKE [36]). L'objection la plus sérieuse à ce genre de méthodes est l'évaluation, à chaque itération, de dérivées partielles. LANCE [30], MOTTELER [37] ... ont modifié l'algorithme pour s'en affranchir. Notons aussi une méthode similaire due à BACHMANN, qui a donné des résultats intéressants. En fait, ce groupe de méthodes ne semble pas être bien adapté aux polynômes que nous souhaitons étudier. Elles présentent, notamment, des difficultés en présence de points de selle ou de racines multiples ; les solutions apportées sont généralement plus ou moins empiriques.

Un autre type de méthode de localisation est dû à LEHMER [33] , avec la généralisation proposée par DELVES, LYNESS [11] . L'algorithme de LEHMER converge dans tous les cas quelque soit le polynôme étudié.

Dans cette première catégorie de méthodes itératives, nous avons testé la méthode de MOTTELER en la modifiant de façon à éviter les points de selle et améliorer la convergence dans le cas de racines multiples. Les calculs dans la méthode de LEHMER étant longs, nous avons essayé d'accroître la rapidité de convergence en modifiant l'algorithme. Nous avons aussi adopté une stratégie mixte : dégrossissage par Lehmer et application d'une méthode itérative à forte convergence.

2. Méthodes de résolution à un point d'appui.

Il s'agit là des importantes méthodes du type NEWTON et ses dérivées : NEWTON améliorée, HALLEY ... et celle de LAGUERRE.

Notons aussi la forme $x = \varphi(x)$ avec des améliorations comme celles proposées par WEGSTEIN [53] qui assure la convergence de la méthode même lorsque $|\varphi'(x)| > 1$.

Dans le chapitre III, nous avons donc fait l'étude de ces méthodes. Une grande partie est consacrée à la détermination de l'ordre de multiplicité quelque soit le polynôme considéré et ses racines. Nous avons été ainsi amenés à considérer deux méthodes faisant intervenir cet ordre de multiplicité calculé : NEWTON-P et LAGUERRE-P qui sont respectivement du 2ème et du 3ème ordre, et ce, quelque soient les racines. De plus, cette détermination nous permet d'exploiter les résultats du chapitre I concernant les erreurs de calculs sur les racines multiples, nous obtiendrons ainsi des gains importants de précision sur de telles racines.

Le cas des racines voisines est lié au précédent. Nous avons été amenés à introduire un coefficient dit de "séparation" entre des racines voisines. Ces dernières, lorsque le point de départ est éloigné, semblent multiples, et au fur et à mesure des itérations perdent généralement ce caractère pour redevenir simples. Dans l'étude faite nous avons essayé de déterminer la limite inférieure en-dessous de laquelle des racines voisines ne pourront être séparées par les méthodes précédentes.

Nous verrons aussi l'importance du choix de la valeur initiale dans la rapidité de convergence et dans la précision des résultats.

D'autres méthodes, d'ordre de convergence plus élevé ont été testées de façon à établir des comparaisons.

3. Méthodes à plusieurs points d'appui.

TRAUB [50] fait la distinction entre les méthodes à un point d'appui avec mémoire et les méthodes à plusieurs points d'appui effectifs.

Dans le premier cas, nous trouvons les méthodes classiques du type de la sécante, avec des améliorations importantes comme celles proposées par DEKKER [7]. Ce dernier algorithme nous a permis, lors des essais,

de déterminer rapidement les racines réelles d'un intervalle donné, à condition cependant que l'ordre de multiplicité des racines ne soit pas pair.

Il y a aussi l'importante méthode de MULLER [38] qui a l'avantage de ne nécessiter aucun calcul de dérivée .

Notons aussi la famille de méthodes d'interpolation par fraction, étudiée particulièrement par JARRATT [19] .

Dans la seconde catégorie, nous trouvons de nombreuses familles de méthodes à haut degré de convergence (cf. OSTROWSKI [41] , TRAUB [50]). Il y a aussi une méthode générale due à JARRATT-GARSDIE-MACK [23] , basée sur une possibilité de choix, à chaque itération, entre trois valeurs approchées déterminées par trois formules différentes.

Dans le chapitre IV nous retrouverons donc la méthode de MULLER qui, en principe, est affectée par la présence de racines voisines ou multiples. En fait, un choix particulier des valeurs initiales nous permettra d'accélérer la convergence dans ce cas. De plus, certains exemples de non-convergence ont pu être corrigés.

Les méthodes d'interpolation par fraction ont été transformées en rendant leur convergence indépendante de l'ordre de multiplicité des racines cherchées. Quelques méthodes ainsi élaborées, ont été testées et fournissent des résultats intéressants.

Nous avons programmé plusieurs méthodes de haut degré ayant un bon indice d'efficacité (cf. les Généralités), notamment une méthode du 4ème ordre que nous avons associée à celle de LEHMER.

Enfin, nous avons repris l'algorithme de JARRATT-GARSDIE-MACK. Nous n'avons conservé que le principe de calcul de trois valeurs approchées, lors d'une même itération. Le choix des points de départ à chaque itération sera différent et conduira généralement à un gain assez important du nombre d'itérations (cf. chapitre 4). Les valeurs initiales ne seront plus arbitraires, elles seront aussi fonction d'un paramètre qui, par ses variations, pourra permettre d'accroître encore la rapidité de convergence.

Cet algorithme très général, fournira de bons résultats quelque soit le polynôme considéré et ses racines.

4. Enfin, il y a certaines méthodes particulières comme celle de BERNOULLI et celles utilisant la division par un facteur quadratique comme LIN et surtout BAIRSTOW [2].

Des modifications sur le choix des valeurs initiales, ainsi que sur certains tests d'arrêt ont permis d'accroître les performances de la méthode de BAIRSTOW (cf. chapitre V).

Toutes les méthodes étudiées ont été testées sur des polynômes particuliers à racines multiples ou voisines, les résultats comparatifs sont regroupés dans le dernier chapitre.

Chapitre I

GENERALITES

Généralités

1 - Notion de "racines-machine "

Le calcul sur ordinateur se faisant avec un nombre fixe de décimales, il est, dans certains cas, nécessaire de distinguer les vraies racines d'un polynôme et "les racines-machine "

Un polynôme sur $\mathbb{C}$ a n racines "vraies" et seulement n si n est son degré, mais il peut avoir plus de n "racines machines".

MOTTELER [37] donne l'exemple suivant :

$z^2 - 0.333$ peut avoir quatre "racines machines" ± 0.577 et ± 0.578 si le test d'arrêt est $|f(z)| \leq 1.10^{-3}$. Par contre, $z^2 - 0.332 = 0$ a ± 0.577 comme racines.

Parmi les "racines-machine" d'un polynôme donné, il n'y a pas de méthode pour choisir à priori quelles sont les meilleures. Ce phénomène peut se produire dès que l'on converge vers une même racine par deux

ou plusieurs chemins différents.

En fait, cette difficulté sera évitée dans la majorité des méthodes étudiées puisqu'une racine α étant trouvée, les calculs se poursuivent sur le polynôme quotient (par $(z-\alpha)$), ce qui lève toute ambiguïté.

2 - Relations entre les erreurs sur des racines obtenues par méthodes itératives

a) Relation entre les erreurs de racines quelconques

$$\begin{aligned}\text{Soit le polynôme } f(z) &= a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0 \\ &= z^n + S_1 z^{n-1} + \dots + S_n\end{aligned}$$

Soient α_i ses racines exactes et Δ_i l'erreur faite sur α_i :

Considérons :

$$\prod_{i=1}^n (z - (\alpha_i + \Delta_i)) = z^n + S'_1 z^{n-1} + \dots + S'_n = 0$$

$$\text{avec } (1) \left\{ \begin{array}{l} S'_1 = S_1 + \sum_{i=1}^n \Delta_i \\ S'_2 = S_2 + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (\alpha_i \Delta_j + \alpha_j \Delta_i) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \Delta_i \Delta_j \text{ avec } i > j \\ \text{---} \end{array} \right.$$

Pour que les valeurs $\alpha_i + \Delta_i$ soient effectivement racines de $f(z)$, il faut que les termes parasites en (1) soient nuls ; en particulier, il est nécessaire que $\sum_{i=1}^n \Delta_i = 0$.

Donc aux erreurs inhérentes au calcul par ordinateur près, la somme des erreurs commises sur les racines est nulle.

b) Relation entre les erreurs de racines multiples

- Soit . le polynôme $(z-a)^2(z-b) = 0$
 . $a + \Delta$ la 1ère racine calculée .

En divisant le polynôme par $z-(a+\Delta)$, nous obtenons :

$$(z-a)^2 (z-b) = (z-(a+\Delta))(z^2 - z(a-\Delta+b) + ab - b\Delta) \text{ en négligeant les termes en } \Delta^2.$$

En résolvant l'équation résultante de la division, les 2 autres racines sont :

$$\begin{cases} z_2 = a - \Delta \\ z_3 = b \end{cases}$$

- Soit le polynôme $(z-a)^3 (z-b) = 0$

Soient $\begin{cases} a + \Delta \\ a + \Delta' \end{cases}$ les deux premières racines trouvées, on a alors :

$$(z-a)^3 (z-b) = (z-(a+\Delta))(z-(a+\Delta'))(z^2 - z((a-\Delta)+(b-\Delta')) + b(a-(\Delta+\Delta')))$$

en négligeant les termes en $\Delta^p \Delta'^q$ tels que $p + q \geq 2$.

Sur ces deux résultats, nous vérifions la remarque faite en a), mais plus encore nous constatons que la somme des erreurs sur la racine multiple a est égale à zéro aussi, à l'approximation faite près.

- Cas général :

$$\text{Soit le polynôme } f(z) = (z-a)^p \prod_{i=1}^{n-p} (z-\alpha_i)$$

Supposons que nous ayons calculé les $(p-1)$ premières racines définies par $a+\Delta_i$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} f(z) = & \left(\prod_{i=1}^{p-1} (z-(a+\Delta_i)) \right) * \left[z^{n-p+1} - z^{n-p} \left((a - \sum_{i=1}^{p-1} \Delta_i) + \sum_{i=1}^{n-p} \alpha_i \right) \right. \\ & \left. + \dots + \left(\prod_{i=1}^{n-p} \alpha_i \right) (a - \sum_{i=1}^{p-1} \Delta_i) \right] + E \end{aligned}$$

où $E = f(\Delta_k^r \Delta_\ell^s \Delta_m^t \dots)$ avec $r + s + t + \dots \geq 2$.

Le polynôme quotient de degré $n-p+1$ a pour racine en particulier $z = a - \sum_{i=1}^{p-1} \Delta_i$.

Il n'a été fait aucune hypothèse sur les α_i qui peuvent être simples ou multiples.

Donc, pour améliorer considérablement les résultats obtenus pour une racine multiple d'ordre p , il suffit de faire la moyenne.

Nous pouvons noter aussi que, toujours à l'approximation E près, les autres racines ne sont pas perturbées.

Le processus est alors itératif pour les autres racines multiples.

REMARQUE :

Dans les essais qui suivent, nous avons pu constater que les résultats précédents sont encore valables même si les racines multiples ne sont pas trouvées dans l'ordre. La précision est légèrement affaiblie.

Dans tous les cas, pour de tels polynômes, il y aura grand intérêt à obtenir un maximum de précision sur les racines calculées de façon à ce que les termes en Δ^p avec $p \geq 2$ soient réellement négligeables ; nous éviterons aussi de cette façon la propagation éventuelle des erreurs faites sur les racines simples.

c) Exemples numériques

La méthode itérative choisie est celle de NEWTON. les racines sont calculées sur le polynôme obtenu après division par $(x - \alpha_i)$, α_i étant la dernière racine déterminée.

$$\bullet (x-1)^2(x-3) = 0 \quad \epsilon = 1.10^{-10} \quad \text{valeur initiale : } 0$$

Résultats :

$$\begin{cases} x_1 = 0.999\ 999\ 999\ 749\ 492 \\ x_2 = 1.000\ 000\ 000\ 250\ 507 \\ x_3 = 3.000\ 000\ 000\ 000\ 001 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^3 \Delta_i = 0 \quad \text{et} \quad \frac{x_1 + x_2}{2} = 1.0$$

$$\bullet (x-1)^3(x-3) = 0 \quad \epsilon = 1.10^{-10} \quad \text{valeur initiale : } 0$$

Résultats

$$\begin{cases} 0.999\ 999\ 899\ 785\ 640\ 2 \\ 1.000\ 000\ 050\ 093\ 216 \\ 1.000\ 000\ 050\ 121\ 147 \\ 2.999\ 999\ 999\ 999\ 997 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^4 \Delta_i = 0 \quad \text{et} \quad \frac{(x_1 + x_2 + x_3)}{3} = 1 + 1.10^{-16}$$

Autre essai en modifiant l'ordre d'obtention des racines :

V.I.

$$\begin{array}{ll} 0 & x_1 = 0.999\ 999\ 899\ 785\ 640\ 2 \\ 3.2 & x_2 = 3.000\ 000\ 000\ 000\ 668 \\ 0 & x_3 = 0.999\ 992\ 479\ 571\ 886\ 8 \\ 0 & x_4 = 1.000\ 007\ 620\ 641\ 804 \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^4 \Delta_i = 0 \quad \text{et} \quad \frac{x_1 + x_2 + x_4}{3} = 1 - 223.10^{-16}$$

L'erreur faite sur la racine simple s'est propagée ; il est donc important de les obtenir avec le maximum de précision de façon à perturber le moins possible les erreurs sur les racines multiples.

Notons cependant que, malgré cette perturbation dans le dernier exemple, la racine multiple d'ordre 3 égale à $x = 1 - 223.10^{-16}$, nous avons fait un gain de 8 décimales (5/13).

$$\bullet \quad (x-1)^3(x-3)(x-4) = 0$$

Nous avons choisi les valeurs initiales de façon à obtenir les racines simples "au milieu" de la racine multiple.

Résultats :

$$\text{avec } \epsilon = 1.10^{-10}$$

$$\epsilon = 1.10^{-15}$$

V.I.

$$\begin{array}{ll} 0 & x_1 = 0.999\ 999\ 971\ 670\ 135\ 4 & x_1 = 0.999\ 999\ 971\ 670\ 135\ 4 \\ 0 & x_2 = 1.000\ 000\ 013\ 957\ 885 & x_2 = 1.000\ 000\ 013\ 957\ 885 \\ 3.2 & x_3 = 2.999\ 999\ 999\ 999\ 971 & x_3 = 2.999\ 999\ 999\ 999\ 992 \\ 3.5 & x_4 = 4.000\ 000\ 000\ 019\ 680 & x_4 = 4.000\ 000\ 000\ 000\ 006 \\ & x_5 = 1.000\ 000\ 014\ 352\ 328 & x_5 = 1.000\ 000\ 014\ 371\ 982 \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^5 \Delta_i = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 3 - 196\ 51\ 10^{-16}$$

$$\sum_{i=1}^5 \Delta_i = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 3 + 2.10^{-16}$$

Les deux premières valeurs de la racine multiple sont identiques, mais l'accroissement de précision demandée entraîne une amélioration des racines simples, et par conséquent, une diminution importante de l'erreur de propagation.

Des essais plus généraux seront faits lors des chapitres concernant les méthodes de NEWTON et LAGUERRE (cf. III)

REMARQUE :

Pour pouvoir appliquer ces résultats, il est indispensable de connaître l'ordre de multiplicité des racines ; c'est ce que nous nous sommes attachés à faire (chapitre III.A)

3 - Notion d'indice d'efficacité

Il est logique d'essayer de classer des méthodes selon leur efficacité. Celle-ci peut dépendre en particulier du nombre de calculs et de la rapidité de convergence d'une méthode donnée.

OSTROWSKI [41] a introduit la notion d'unité HORNER. Le calcul du polynôme pour une valeur de la variable représentera un Horner. Dans le cas des polynômes, le calcul de la dérivée 1ère, seconde, ... peut être considéré comme étant égal aussi à un Horner (la longueur des calculs étant à peu près la même que pour le calcul de la fonction). Ainsi la méthode de Newton
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
 nécessitant à chaque itération, le calcul de f et celui de f' sera représenté par deux Horners.

Le second critère chiffrable est l'ordre de convergence ; dans l'exemple de Newton, il est de deux pour une racine simple.

Il suffit alors de trouver une formule liant ces deux critères , TRAUB [50] propose :

- si . p est l'ordre de convergence,
- . d est le nombre d'Horner utilisés pour une itération,

$$\boxed{\text{EFF} = \frac{p}{d}} \quad \text{comme indice d'efficacité.}$$

Une autre définition proposée par OSTROWSKI [41] et TRAUB [50] est :

$$\boxed{\text{EFF}^* = p^{\frac{1}{d}}} \quad (\text{pour Newton} \quad \text{EFF}^* = 2^{\frac{1}{2}} \approx 1.414)$$

Nous utiliserons cette dernière, mais, cependant, avec précautions.

En effet, cette définition ne tient pas compte des remarques suivantes :

- le cas des racines multiples imposera un 2ème indice d'efficacité,
- l'ordre de convergence est généralement local et non global,
- certaines méthodes ne convergent que localement, alors que d'autres peuvent converger globalement.

Néanmoins, ce coefficient permet une classification partielle des méthodes.

4 - Test sur la valeur du polynôme pour une valeur approchée de la racine

- Soit :
- . z la valeur de la variable,
 - . $\tilde{z} = \frac{1}{z}$,
 - . $f(z)$ le polynôme dont on cherche les racines,
 - . $g(z)$ le polynôme dont les racines sont les inverses de celles de $f(z)$ (polynôme réciproque),
 - . ϵ la précision désirée.

Si $|z| \leq 1$, nous testerons $|f(z)| < \epsilon$ et si z est voisin de la racine, alors $|f(z)|$ sera petit et le test fonctionnera normalement.

Par contre, si $|z| > 1$, même si z est proche d'une racine $|f(z)|$ peut être très grand (il suffit pour cela par exemple que le degré du polynôme soit élevé, ou que $|z| \gg 1$) et le test $|f(z)| < \epsilon$ ne serait plus significatif. C'est pourquoi, dans ce dernier cas, nous testerons $|g(\tilde{z})| < \epsilon$, ce dernier test, pour $|z| > 1$, étant alors comparable au précédent lorsque $|z| \leq 1$.

Chapitre II

-

METHODES DE LOCALISATION

- A -

Méthode de LEHMER-SCHUR

1 - Introduction

C'est une méthode d'approximation due à LEHMER [33] à partir de résultats obtenus par SCHUR .

Elle a pour but de localiser les racines d'un polynôme

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (a_0, a_n \neq 0) \quad \text{dans des disques}$$

$D(c ; R) = \{z : |z - c| \leq R\}$, les rayons successifs devenant de plus en plus petits.

A la limite, si le rayon d'un cercle contenant une racine, devient plus petit qu'une certaine valeur choisie à l'avance, alors le centre de ce cercle sera considéré comme valeur approchée de la racine, et l'erreur maximale en module commise sur cette racine sera donnée par le rayon.

Deux problèmes se posent donc :

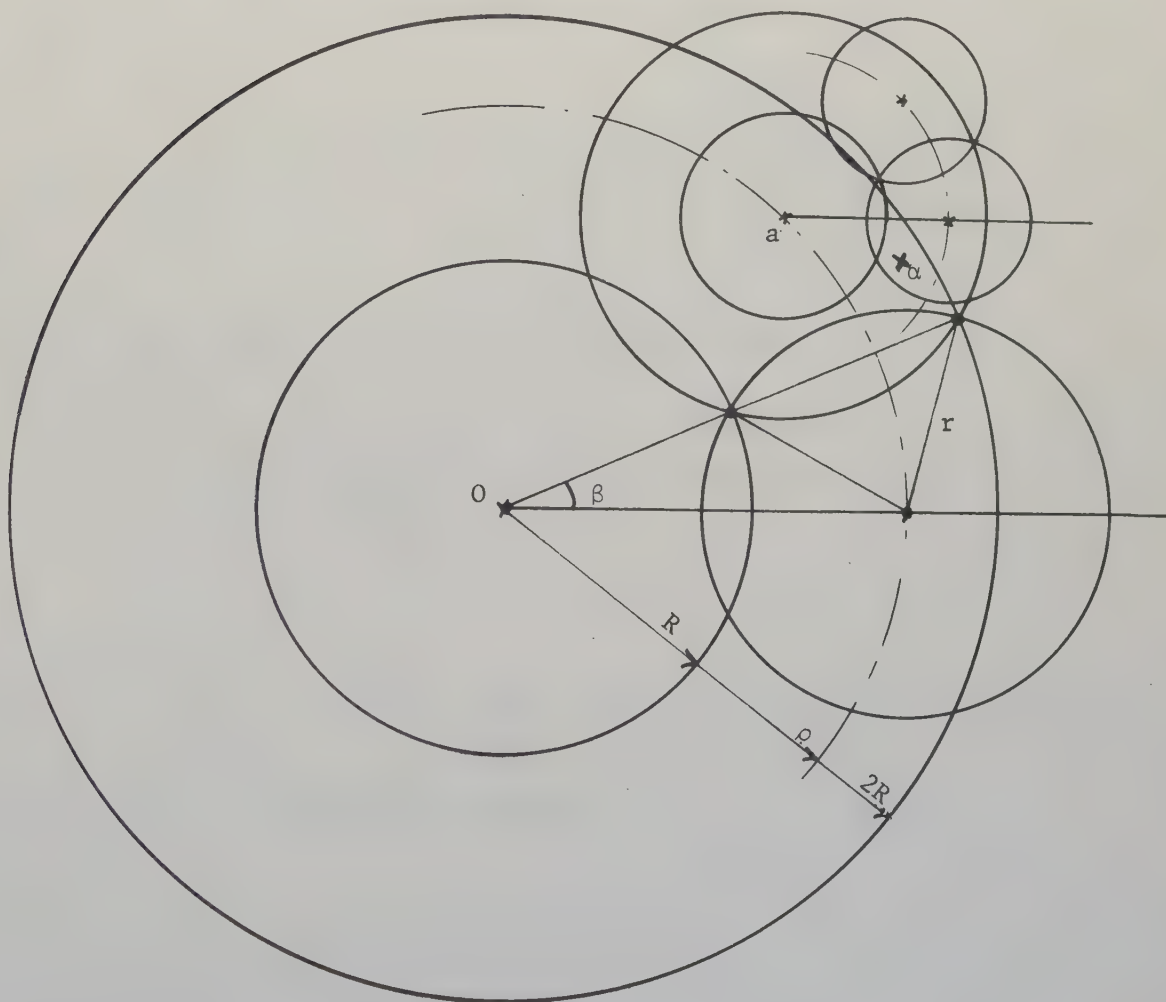
- a) Comment couvrir de façon optimale, une région du plan à l'aide de cercles ?
- b) Comment peut-on savoir avec certitude si un polynôme donné a au moins une racine à l'intérieur d'un disque de centre et de rayon connus ?

2 - Etude théorique

2.1. Recouvrement d'une région du plan par des cercles

On peut choisir au départ, un cercle de centre O et de rayon R puis doubler à chaque fois ce rayon jusqu'à ce qu'au moins une racine soit comprise dans l'anneau limité par deux cercles consécutifs.

Nous sommes donc ramenés à la recherche du recouvrement optimal d'un anneau défini par deux cercles dont le plus grand est le double de l'autre, c'est-à-dire $R < |z| < 2R$.



Pour minimiser la surface de ces cercles de recouvrement, nous considérons ceux qui se coupent sur les frontières de l'anneau. Nous prendrons un nombre pair de cercles afin que le recouvrement soit symétrique par rapport à Ox .

Puisqu'au moins une des racines se trouve dans l'anneau $R < |z| < 2R$, elle se situera aussi à l'intérieur d'un des cercles de recouvrement de rayon r . Ce disque déterminé, son rayon sera divisé par deux jusqu'à ce qu'au moins une racine soit à l'intérieur d'un nouvel anneau défini par $r' < |z-a| < \frac{r'}{2}$ (a est le centre de l'anneau). Le processus est alors itératif, nous recouvrons ce nouvel anneau par des cercles de rayon r_1 . etc ...

Pour que l'algorithme converge, c'est-à-dire qu'une racine soit localisée à l'intérieur d'un disque de rayon petit, il faut que le rayon des cercles de recouvrement r soit inférieur à $2R$ (rayon extérieur de l'anneau).

Nous pouvons remarquer que si r est grand, il y aura moins de cercles à explorer, mais la localisation sera moins bonne. Il y a donc une optimisation à faire sur le nombre de cercles de recouvrement.

2.1.1. Cas général : recouvrement par $2n$ cercles

La figure précédente nous fournit deux relations dans deux triangles qui permettent de déterminer le lieu des centres et le rayon des cercles pouvant recouvrir l'anneau.

Soient :

- . l'anneau $R < |z| < 2R$,
- . ρ le rayon du cercle sur lequel sont situés les centres des cercles de recouvrement,
- . r le rayon de l'un de ces cercles.

L'angle formé par les droites joignant l'origine aux deux centres de deux cercles consécutifs est donné par $2\beta = \frac{\pi}{n}$, si $2n$ est le nombre total des cercles considérés.

Nous avons :

$$R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \frac{\pi}{2n} = r^2$$

$$4R^2 + \rho^2 - 4R\rho \cos \frac{\pi}{2n} = r^2$$

$$\implies 3R - 2\rho \cos \frac{\pi}{2n} = 0 \implies \rho = \frac{3R}{2 \cos \frac{\pi}{2n}}$$

Les centres appartiennent au cercle défini par :

$$z = \frac{3}{2} \frac{R}{\cos \frac{\pi}{2n}} e^{\frac{i\pi k}{n}}$$

$$\text{et } r^2 = \frac{9R^2}{4 \cos^2 \frac{\pi}{2n}} - R^2.$$

2.1.2. a) Cas de 4 cercles (n=2) et de 6 cercles (n=3)

$$\begin{aligned} \text{Pour quatre cercles nous avons : } r^2 &= \frac{5R^2}{2}, \quad r = \sqrt{\frac{5}{2}} R \\ \text{et pour six cercles : } r^2 &= R^2, \quad r = R. \end{aligned}$$

Nous n'envisagerons pas ces deux cas, les rayons des cercles de recouvrement étant grands, la localisation est mauvaise à chaque itération.

b) Cas de 8 cercles. n = 4

$$r^2 = \frac{9R^2}{4 \cos^2 \frac{\pi}{8}} - 2R^2 < \frac{9R^2}{3.69} - 2R^2 = \frac{1.62}{3.69} R^2 < 0.44 R^2$$

$$r \approx 0.662 R < 0.666 < \frac{2}{3} R$$

On pourrait donc prendre

$$r = \frac{2}{3} R \quad z = \frac{3R}{2 \cos \frac{\pi}{8}} e^{\frac{i\pi k}{4}}$$

En fait, $\frac{2}{3} R$ semble peut être trop près du rayon limite, les racines très proches de la frontière du cercle seraient sans doute difficilement discernables par suite des erreurs de calcul.

Pour plus de sécurité, on majorera ce rayon et nous prendrons $r = \frac{3}{4} R$, ce qui affine la valeur donnée par LEHMER $r = \frac{5}{6} R$ et par HAGEN (proposée par BALFOUR MAC TERNAN [3]) $r = \frac{4}{5} R$.

En principe, la rapidité de convergence et la précision seront meilleurs puisque le rayon des cercles est plus petit.

c) Cas de 10 cercles $n = 5$

$$r^2 = \frac{9R^2}{4 \cos^2 \frac{\pi}{10}} - 2R^2 \quad r \approx 0.606 R < \frac{2}{3} R$$

Ce cas est envisageable. On augmente le nombre de disques à explorer, donc le nombre de calculs pour un anneau donné, mais la précision et la rapidité de convergence seront accrues par rapport au cas précédent. (Nous vérifierons cette remarque sur les différents essais effectués).

Nous pourrions, évidemment, continuer à augmenter n , mais r serait de moins en moins modifié, puisque $\cos \frac{2\pi}{n} \rightarrow 1$ quand n devient grand.

$$\text{A la limite nous aurions } r^2 = \frac{9R^2}{4} - 2R^2 = \frac{R^2}{4} \quad r = \frac{R}{2}.$$

Le nombre de calculs serait alors considérablement accru. Il faut choisir un moyen terme, c'est pourquoi nous avons testé les deux possibilités suivantes :

et	$r = \frac{3}{4} R$	$z = \frac{3R}{2 \cos \frac{\pi}{8}} e^{\frac{\pi i k}{4}}$	$k = 0, 1, 2, \dots, 7$
	$r = \frac{2}{3} R$	$z = \frac{3}{2} \frac{R}{\cos \frac{\pi}{10}} e^{\frac{i \pi k}{5}}$	$k = 0, 1, 2, \dots, 9$

Dans le 1er cas, la convergence progressè de la façon suivante :

$$2R_1 \leq r_0 = \frac{3}{4} R$$

$$2R_2 \leq r_1 = \frac{3}{4} R_1$$

$$R_k \leq \left(\frac{3}{8}\right)^k R$$

La progression géométrique a pour raison $\frac{3}{8}$.

Dans le second cas, elle est de $\frac{1}{3}$ ce qui, évidemment, est meilleur.

2.2. Méthode pour déterminer si une racine d'un polynôme se situe à l'intérieur ou non d'un cercle donné $|z - c| = r$

On se ramène au cas du cercle unité par transformation $g(z) = f(rz + c)$.

La démonstration s'appuie sur des résultats fournis par SCHUR et sur le théorème de ROUCHE concernant le nombre de zéros d'une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple.

Ces résultats ont été repris par LEHMER [33] .

Dans la suite, nous nous placerons dans le cercle unité en considérant le polynôme $g(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ tel que $g(0) \neq 0$.

On définit $g^*(z) = \overline{a_0} + \overline{a_1} z + \dots + \overline{a_{n-1}} z^{n-1} + \overline{a_n} z^n$
 $g^*(z) = z^n \overline{g(\bar{z}^{-1})}$.

Soit la suite finie formée par :

$$T(g) = \overline{a_n} g(z) - a_0 g^*(z)$$

Le terme en z^n disparaît par cette combinaison linéaire.

Autre propriété importante : le terme constant est toujours réel .

$$T(g(0)) = \overline{a_n} a_n - a_0 \overline{a_0} = |a_n|^2 - |a_0|^2 .$$

. Si $T(g(0)) \neq 0$, on applique l'algorithme à la fonction $T(g)$ d'où la suite $T(g), T^2(g) \dots T^k(g)$ où $T^k(g(0))=0$.

Nous avons là une suite de polynôme de degré décroissant dont le terme constant est réel.

k est le plus petit entier pour lequel $T^k(g(0)) = 0$.

2.2.1. Théorème fondamental

Supposons que $g(z)$ n'ait pas de racine sur le cercle unité et $g(0) \neq 0$.

S'il existe h tel que pour $h \in]0, k[$ on ait $T^h[g(0)] < 0$ alors $g(z)$ a au moins une racine à l'intérieur du cercle unité.

Si au contraire $T^j[g(0)] > 0$ pour $j \in [1, k[$ et si $T^{k-1}[g(z)]$ est une constante alors, il n'y a pas de racine de $g(z)$ dans le cercle unité.

Avant d'en donner la preuve, nous allons rappeler certains résultats indispensables à la démonstration.

2.2.2. Rappels

Γ : cercle unité,

$$\alpha) \quad \int_{\Gamma^+} \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 2i\pi & \text{si } |a| > 1 \\ 0 & \text{si } |a| < 1 \end{cases}$$

$\beta)$ Théorème de d'Alembert

Soit $P(z)$ un polynôme sans racine sur le cercle unité ; alors le nombre de racines de $P(z)$ à l'intérieur de Γ , (multiplicité des racines comprise) est donné par :

$$N = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma^+} \left(\frac{P'(z)}{P(z)} \right) dz = \frac{1}{2\pi} [\arg P(z)]_{\Gamma^+}$$

$\gamma)$ Cas particulier du théorème de Rouché

(voir KORGANOFF [26] ou MARDEN [34]).

Soient $P(z)$ et $Q(z)$ deux polynômes tels que $|P(z)| < |Q(z)|$ pour $|z| = 1$ $Q(z) \neq 0$.

Alors Q et $P+Q$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur du cercle unité.

REMARQUE :

Ce résultat n'est en fait qu'un cas particulier du théorème de Rouché, qui est beaucoup plus général.

δ) Lemme (Voir LEHMER [33] ou MARDEN [34])

Soit $f(z)$ un polynôme de degré d sans racine sur Γ ayant m racines à l'intérieur de Γ .

Si $T(f(0)) \neq 0$, alors $T(f(z))$ n'a pas de racine sur Γ et en a m ou $d-m$ à l'intérieur de Γ suivant que $T(f(0))$ est positif ou négatif.

Démonstration :

Nous avons vu que $f^*(z) = z^d \bar{f}(\bar{z}^{-1})$.

Si $|z| = 1$, c'est-à-dire si l'on est sur le cercle $\bar{z}^{-1} = z$,

$$|f^*(z)| = |f(z)|.$$

a) Supposons que $T(f(z))$ ait une racine r sur Γ .

On aurait donc

$$T(f(r)) = 0 = \bar{a}_d f(r) - a_0 f^*(r)$$

Mais $|f(r)| = |f^*(r)| \implies$ ce qui entraîne que $|\bar{a}_d| = |a_0|$.

D'où $T(f(0)) = |a_d|^2 - |a_0|^2 = 0$ contrairement à l'hypothèse de départ.

b) Supposons que $T(f(z)) > 0$

$$T(f(z)) = \bar{a}_d f(z) - a_0 f^*(z)$$

$$\text{Posons } \begin{cases} Q = \bar{a}_d f(z) \\ P = -a_0 f^*(z) \end{cases}$$

$$\text{alors, } |P| - |Q| = |f|(|a_0| - |a_d|) < 0$$

puisque $|a_d|^2 - |a_0|^2 > 0$.

Donc, sur Γ , nous avons $|P| < |Q|$.

Nous nous trouvons alors dans l'hypothèse du théorème de Rouché (γ).

Nous en déduisons que $P+Q$, c'est-à-dire $T(f(z))$ a le même nombre de zéros que Q c'est-à-dire $f(z)$, à l'intérieur de Γ .

c) Enfin nous supposons que $T(f(z)) < 0$.

Il suffit d'échanger les rôles de P et Q et nous pourrions en conclure que $T(f(z))$ et $f^*(z)$ ont le même nombre de racines à l'intérieur de P .

Mais dans ce cas, le nombre est $d-m$ car chaque racine de α de f^* intérieur à Γ correspond à la racine $\frac{1}{\alpha}$ de $f(z)$ extérieur à Γ .

2.2.3. Démonstration du théorème fondamental

Des résultats obtenus en 2.2.2., nous pouvons déduire le théorème de 2.2.1.

En effet,

soit m le nombre de racines de $g(z)$ dans Γ .

Supposons qu'il existe h le plus petit entier tel que :

$$\begin{aligned} T^h(g(0)) &< 0 \\ T^i(g(0)) &> 0 \quad 0 \leq i < h \end{aligned}$$

En appliquant les résultats précédents, on peut en conclure que $g(z)$, $T(g(z))$, ..., $T^{h-1}(g(z))$ ont chacun m racines dans Γ .

Soit d_{h-1} le degré ou nombre de racines de $T^{h-1}(g(z))$. D'après le lemme δ), on en déduit que $T^h(g(z))$ a $(d_{h-1}-m)$ racines dans Γ .

$$\text{Donc, } d_h \geq d_{h-1} - m$$

$$\implies m \geq d_{h-1} - d_h > 0.$$

Par conséquent, $g(z)$ a au moins une racine dans Γ . (Nous savons que le degré diminue au moins d'une unité à chaque fois).

Inversement,

si $g(z)$, $T(g(z))$, ..., $T^{k-1}(g(z))$ ont m racines dans Γ , si $T^i(g(0)) > 0$ pour $i \in [1, k[$, $T^{k-1}(g(z))$ est une constante > 0 , nous ne pouvons aller plus loin dans les itérations.

$T^{k-1}(g(z))$ n'a donc aucun zéro et par conséquent il en est de même pour $g(z) \implies m = 0$.

2.2.4. Remarques

- Le théorème reste vrai si $g(z)$ a une ou plusieurs racines sur Γ (voir LEHMER)

- Que se passe-t-il dans le cas où $T^{k-1}(g(z))$ n'est pas une constante ?

Cela peut arriver pour des polynômes particuliers à coefficients symétriques. Par exemple pour $g(z) = 3z^4 - 6z^3 + 8z^2 - 6z + 3 = g^*(z)$,

$Tg(z)$ est alors identiquement nul.

Il suffit de se placer dans un cercle concentrique de rayon plus grand de façon à éliminer la symétrie. LEHMER propose de multiplier par $3/2$.

Le même transformation pourra être faite lorsque $T^i(g(0))$ sera trop petit pour que l'on puisse être assuré de son signe.

- Il est à noter qu'une ou plusieurs racines pourraient se trouver sur les cercles délimitant l'anneau qui contient au moins une racine. Mieux encore, elle pourrait se trouver à l'intersection de ces cercles délimitateurs et des cercles de recouvrement.

Avec les erreurs dues aux calculs il y aurait risque de passer à côté d'une racine. C'est pourquoi l'augmentation arbitraire de la longueur du rayon des cercles de recouvrement se justifie. Cependant, cette solution a échoué lors de l'essai sur le polynôme $z^6 + 3z^4 + 3z^2 + 1 = 0$.

Nous avons préféré opérer une translation des axes, ce qui enlève la symétrie initiale des coefficients du polynôme.

3 - Analyse des programmes

Le programme nécessite donc la présence de deux sous-programmes :

- . Calcul des polynômes pour différentes valeurs de la variable,
- . Un développement de Taylor permettant de changer l'origine des axes.

REMARQUE :

La méthode étant relativement longue, il est souhaitable de demander une précision assez faible. Nous aurons ainsi une bonne approximation d'une racine. Il suffit, ensuite, d'appliquer à ce résultat une itération d'une méthode de convergence élevée, pour obtenir une très bonne précision.

C'est ce qui a été fait dans les programmes. Nous avons choisi la méthode du 4^{ème} ordre, étudiée en (IV.B.4.), particulièrement efficace lorsque l'on est au voisinage de la racine.

Une racine α étant trouvée, nous divisons le polynôme initial par $(z-\alpha)$ et recommençons sur ce nouveau polynôme quotient.

3.1. Difficultés rencontrées - Modifications résultantes

La méthode de Lehmer originale est numériquement instable. En effet, après multiplications successives par 2^λ , certains coefficients peuvent devenir très grands ou très petits suivant le signe de λ .

De même, plus nous nous rapprochons d'une racine, plus les coefficients du polynôme après translation, deviendront petits.

a) Cas des coefficients petits

Donc, si λ est < 0 , les coefficients de $f(2^\lambda rz)$ peuvent devenir rapidement petits, en particulier les premiers puisqu'ils sont élevés à la puissance $n, n-1, \dots$. Nous risquons alors l'UNDERFLOW en machine.

Pour éviter cela, avant le calcul, nous testerons le coefficient de tête, puisqu'il est a priori le plus petit. S'il est $< 1.10^{-35}$ nous arrêtons l'algorithme.

Pourquoi cette puissance 10^{-35} ?

Sachant que $T(f(z)) = \overline{a}_n f(z) - a_0 f^*(z)$, le premier coefficient est donc multiplié par un autre qui peut être de même ordre de grandeur ; le produit des deux atteint à peu près la limite inférieure acceptable par l'ordinateur ($\approx 10^{-78}$).

REMARQUE :

Etant donné que les programmes sont faits en double précision, c'est-à-dire avec 15-16 chiffres significatifs, il est inutile de continuer à faire des itérations sur des polynômes dont tous les coefficients sont inférieurs à 1.10^{-15} . Si c'est le cas, l'algorithme s'arrêtera et nous considérerons qu'une racine a été trouvée même si la précision souhaitée n'est pas atteinte.

Dans les essais effectués, le test 3.2.a) a généralement fonctionné avant ce dernier. Il y a en effet, en raison de l'élévation des puissances décroissantes, un écart important entre l'ordre de grandeur des premiers et derniers coefficients du polynôme $f(2^\lambda rz)$.

Enfin, nous pouvons noter, qu'aucun des deux tests précédents n'a été utilisé lors des essais, si la précision demandée est faible ce qui est préférable (cf. 3.1.).

b) Cas des OVERFLOWS

Dans le cas, par exemple, de racines éloignées du point de départ, le calcul des coefficients de $f(2^\lambda rz)$ avec λ devenant de plus en plus grand, peut conduire au phénomène d'OVERFLOW.

Nous avons évité cette difficulté en divisant systématiquement tous les coefficients de $T(f(z))$ par le coefficient de tête.

REMARQUE :

Nous aurions pu opérer de la même manière pour l'UNDERFLOW, mais cela nous a semblé inutile. Le fait que les coefficients deviennent très petits, indique que nous sommes au voisinage d'une racine.

La multiplication par une puissance élevée, afin de ramener le

premier coefficient à l'unité par exemple, introduirait des erreurs importantes et surtout une perte de signification des résultats.

3.2. Tests d'arrêt

a) Test de précision

Si les tests précédents n'ont pas fonctionné auparavant, l'arrêt se fera dès que le rayon du cercle exploré sera inférieur à la précision demandée.

Nous avons cependant préféré prendre une erreur relative ($\frac{\text{rayon du cercle}}{\text{valeur approchée}}$) pour le cas des racines de grand module.

b) Test de sécurité

Un arrêt de sécurité a été prévu lorsque, par suite du cumul des erreurs et d'une précision demandée trop importante, les $2n$ cercles ont été explorés, sans que l'on ait localisé une racine.

3.3. Programmes réalisés

Nous avons testé les trois cas suivants :

a) proposé par HAGEN, qui est déjà une amélioration par rapport à ce que proposait LEHMER :

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \frac{4}{5} R \\ c = \frac{3R}{2 \cos \frac{\pi}{8}} e^{\frac{i\pi k}{4}} \end{array} \right. \quad \text{au lieu de} \quad r = \frac{5}{6} R \quad (I)$$

$$b) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = \frac{3}{4} R \\ c = \frac{3R}{2 \cos \frac{\pi}{8}} e^{\frac{i\pi k}{4}} \end{array} \right. \quad (II)$$

c) Avec 10 cercles au lieu de 8

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \frac{2}{3} R \\ c = \frac{3R}{2 \cos \frac{\pi}{10}} e^{\frac{i\pi k}{5}} \end{array} \right. \quad (\text{III})$$

Les trois programmes utilisent la modification proposée en 3.1, (adjonction d'une méthode à forte convergence dans le cas de racines simples).

La méthode de LEHMER, qui au départ n'était qu'une méthode d'approximation, devient de ce fait un algorithme assez efficace de recherche des racines simples d'un polynôme quelconque.

4 - Résultats numériques

4.1. Comparaison des trois programmes

Nous avons testé plusieurs polynômes et les résultats obtenus ne sont pas très significatifs.

Nous en donnons deux ici :

a) $z^4 - 1 = 0 \quad \epsilon = 1.10^{-4}$

Nous avons trouvé des résultats semblables par les trois programmes. Seul le nombre d'itérations a légèrement varié ; il en a fallu :

78 pour (I)

73 pour (II)

71 pour (III)

b) Polynôme P_{12} du 8ème degré avec $\epsilon = 1.10^{-4}$.

Pour obtenir les mêmes racines, il a fallu :

170 itérations pour (I)

155 itérations pour (II)

179 itérations pour (III).

Nous pouvons cependant faire les remarques suivantes :

. Le programme (III) malgré sa convergence plus rapide, conduit à des calculs plus longs, le nombre de cercles à explorer étant plus grand. Le gain en convergence ne semble pas toujours compenser l'accroissement des calculs dû à l'augmentation du nombre de cercles à étudier. Ceci est d'autant plus vrai que la précision demandée est faible, ce qui est le cas dans la méthode de Lehmer modifiée. Par contre, si la précision désirée est importante, nous avons pu remarquer que (III) pouvait devenir meilleure que les deux autres.

. Le programme (II) semble être très souvent le meilleur (légèrement). Le nombre de cercle à explorer est du même ordre qu'en (I), par contre la convergence est un peu plus rapide.

Pour les essais suivants, c'est donc le programme (II) qui a été utilisé.

4.2. Quelques essais effectués

$$a) z^4 - 1 = 0 \quad \epsilon = 1.10^{-4}$$

Par la méthode de Lehmer seule, nous avons obtenu :

$$\begin{aligned} &0.999\ 942 + 0.2\ 10^{-16}\ i \\ &-0.2\ 10^{-3} + 0.999\ 968\ i \\ &-0.999\ 88 + 0.3\ 10^{-15}\ i \\ &0.3\ 10^{-3} + 0.999\ 98\ i \end{aligned}$$

Par l'addition d'une itération de la méthode du 4ème ordre, choisie avec comme valeur initiale les résultats précédents, nous avons obtenu :

$$\begin{array}{ll} 0.1000000000000000D+01 & -0.5344224484081253D-28 \\ -0.4975579952389009D-14 & 0.9999999999999999D+00 \\ -0.9999999999999999D+00 & -0.2998913597183746D-14 \\ -0.2123301534595612D-14 & -0.9999999999999999D+00 \end{array}$$

en 73 itérations.

b) $z^4 - 1 = 0$ avec $\epsilon = 1.10^{-10}$

0.10000000000000000D+01	0.0
0.5445300891868171D-20	0.10000000000000000D+01
-0.10000000000000000D+01	0.7302911996984690D-16
0.0	-0.10000000000000000D+01

en 151 itérations.

Le nombre d'itérations a doublé pour obtenir sensiblement le même résultat. Le test sur le 1er coefficient $< 10^{-30}$ a fonctionné pour deux racines, ce qui est logique étant donnée la précision demandée. Avec Lehmer seule, nous avons trouvé 8 décimales exactes contre 4 avec $\epsilon = 1.10^{-4}$. Dans ce dernier cas, l'application d'une méthode du 4ème ordre pouvait nous donner $\approx 4 \times 4 = 16$ décimales, alors qu'ici, une méthode du second ordre (Newton) aurait largement suffi.

L'apport de la méthode du 4ème ordre nous permet donc de demander une précision relativement faible, ce qui diminue considérablement le nombre d'itérations et ce, sans perte de précision sur les résultats.

c) Polynôme $P_{33} \quad (x-0.88)(x-0.89)(x-0.90)(x-0.91) = 0$
 $\epsilon = 1.10^{-4}$.

En 55 itérations, nous avons obtenu :

0.8899999999999999D+00	0.0
0.8799999999999999D+00	-0.6049172739361003D-23
0.9000000000000000D+00	0.2084797851405453D-22
0.9099999999999999D+00	-0.1383880577550353D-22

Nous pouvions espérer de meilleurs résultats, mais la méthode du 4ème ordre utilisée est affectée par la présence de racines voisines (une itération supplémentaire aurait permis de trouver des résultats meilleurs).

d) Polynôme P_{21} à coefficients complexes

$$\varepsilon = 1.10^{-3}$$

La méthode de Lehmer n'est pas affectée par la présence de la racine multiple.

Résultats : en 71 itérations :

0.0868411340937020D-01	0.4550898606932525D+00
0.1999672415200738D+01	0.1468987287194406D-06
0.2000327451676505D+01	-0.1438296356920492D-06
0.1000000141210695D+01	-0.5293724276280396D-08
-0.2098684121506307D+01	-0.4550898584686212D+00

e) Polynôme P_{22} à racines multiples $(z-i)^3(z+i)^3$

$$\varepsilon = 1.10^{-4}$$

-0.1068252157389866D-03	0.9999855929834527D+00
0.5352194012245489D-04	0.1000119323723394D+01
0.5329977474004440D-04	0.9998950770398379D+00
-0.1989960921042140D-02	-0.1000735638324269D+01
0.3598826595487509D-03	-0.9979071210567686D+00
0.1630081762370088D-02	-0.1001357234365647D+01

en 138 itérations.

Le polynôme étant symétrique, il a fallu opérer la translation prévue à cet effet. Notons que l'application de la méthode du 4ème ordre n'a pas fait progresser la précision du résultat.

REMARQUE :

Plus généralement, nous pouvons dire que la méthode de Lehmer n'est que peu affectée par la présence de racines multiples. On pourrait songer à lui adjoindre une méthode dont l'ordre de convergence soit indépendant de la multiplicité. Nous n'avons pas retenu cette idée, car la méthode de Lehmer ne peut être compétitive que si on lui associe une méthode à forte convergence (3, 4 ou 5) relativement simple.

f) Polynôme du 8ème degré dont les coefficients sont :

1, 6, -21, -597, -2022, 7287, 27170, -21600, -72000

En 155 itérations, nous avons obtenu (avec $\epsilon = 1.10^{-4}$)

LES RACINES SONT

0.1999999999999999D+01	0.1216679279347415D-26
-0.1750888258065087D+01	0.5840252825713239D-25
0.3000000000000000D+01	-0.5649344172566678D-26
-0.3000000000000001D+01	-0.7263993917836777D-25
0.7848532374733105D+01	0.3176912105204524D-27
-0.4548822058333902D+01	0.6125709524872862D+01
-0.50000000000000205D+01	-0.8281281563810125D-14
-0.4548822058333900D+01	-0.6125709524872854D+01

5 - Remarques

Une méthode semblable, plus générale, a été développée par DELVES et LYNESS [11]. La question posée n'est plus de savoir s'il y a au moins un zéro dans R (intérieur d'un contour Γ), mais combien il y a de zéros.

On utilise le théorème :

$$s_N = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} z^N \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^v z_i^N$$

où z_i ($i=1,2,\dots,v$) sont tous les zéros intérieurs à Γ . Le nombre de zéros situés dans R est donné par $s_0 = v$.

En évaluant $s_1, \dots, s_v$, nous pouvons déterminer le polynôme dont les racines sont contenues dans la région R.

Il suffit d'utiliser alors une méthode itérative pour calculer ces racines. Le polynôme initiale est divisé par le polynôme ainsi obtenu, et le processus est itératif.

Avec cette méthode, il est possible de déterminer les racines à l'intérieur d'un cercle de rayon donné par exemple.

Cependant, les calculs semblent longs.

6 - Conclusion

Le méthode de LEHMER peut être intéressante pour localiser les racines de polynômes mal conditionnés.

En lui adjoignant, pour compléter cette approximation, une méthode itérative d'ordre élevé, elle peut devenir une bonne méthode de résolution d'équations polynomiales dans le cas où les racines sont simples.

Elle a le grand avantage d'être valable aussi pour des polynômes à coefficients complexes. En plus de l'approximation fournie, on peut obtenir le rayon d'un cercle contenant la racine exacte, ce qui donne une idée de l'erreur.

Son principal défaut semble être la relative lenteur des calculs.

Elle est sans doute à déconseiller pour des polynômes de haut degré.

Elle conserve cependant une certaine efficacité pour des polynômes mal conditionnés de bas degré.

- B -

Méthode de MOTTELER

1 - Introduction

MOTTELER [33] propose une méthode simple basée sur un théorème de d'Alembert. Elle peut être considérée comme une simplification de la méthode de "Steepest Descent". Elle est applicable à des polynômes quelconques à coefficients réels ou complexes.

Cependant, tel que proposé par Motteler, l'algorithme a échoué devant certains types de polynômes ou dans certains cas particuliers. Nous avons essayé d'apporter quelques modifications afin d'éliminer certaines difficultés inhérentes à la méthode.

Comme pour MULLER (cf § IV.A), ce processus ne nécessite que l'évaluation du polynôme à chaque itération et de plus, les zéros pourront être obtenus par module croissant (approximativement) ce qui est une sécurité partielle de précision (cf. WILKINSON [56]). C'est donc une méthode qui, *a priori*, peut être intéressante.

2 - Lemme de d'Alembert

Il établit que $u = |P(z)|$ pour $z \in \mathbb{C}$ a un minimum, si et seulement si, $|P(z)| = 0$, c'est-à-dire si z est une racine. Une démonstration en est donnée, par exemple, par DELONE [10] .

Il est cependant nécessaire d'adapter ce lemme aux ordinateurs, puisque seule une valeur approchée du minimum peut être obtenue.

On admet qu'il suffit que z soit dans un voisinage d'un minimum de $|P(z)|$ pour qu'il soit considéré comme racine. Il reste cependant à déterminer ce que l'on peut accepter comme voisinage d'un minimum.

Il sera principalement fonction de la précision choisie au départ et du conditionnement du polynôme. Plus la précision demandée sera grande, plus le voisinage acceptable sera généralement petit ; mais si le polynôme est mal conditionné, alors ce voisinage sera "anormalement" grand , d'où une chute de précision sur les résultats.

Cette remarque est valable pour toutes les méthodes du type de la "Steepest Descent" qui sont bâties sur le même principe. Elles diffèrent cependant par la façon d'atteindre le minimum local de la surface $u = |P(z)|$.

3 - Analyse de la méthode

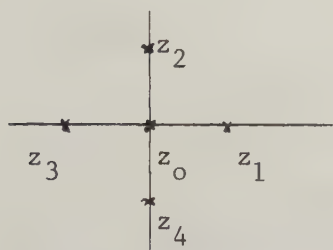
3.1. Description

Nous choisissons une valeur de départ z_0 . Ce choix est généralement arbitraire; nous verrons qu'il faudra cependant, prendre des précautions pour certains polynômes particuliers.

Comme pour la méthode de "Steepest Descent", nous cherchons une ligne de forte pente qui doit, en principe, conduire à un minimum de la surface $u = |P(z)|$. La méthode de "Steepest Descent" nécessite, pour cela, le

calcul de dérivées partielles à chaque itération ; ces calculs sont longs et ont été évités par MOTTELER [37] .

Il considère quatre points symétriques par rapport à z_0 , c'est-à-dire situés par exemple sur les axes en formant un carré dont z_0 serait le centre.



Ces points sont situés à une distance d de z_0 que l'on appellera le pas.

Le processus est alors fort simple.

On calcule $|P(z)|$ pour chacun de ces cinq points.

Deux possibilités se présentent :

a) Le minimum des valeurs obtenues se trouve au point milieu (c'est-à-dire z_0). Cela signifie que z_0 est dans un "creux" par rapport à z_1, z_2, z_3, z_4 .

Nous considérons alors quatre autres points z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 dans les mêmes directions, obtenues à partir de z_0 , mais cette fois avec un pas moitié ($\frac{d}{2}$).

Ce cas peut se reproduire jusqu'à ce que la précision soit atteinte si, effectivement, z_0 est toujours un minimum.

Par contre, le cas général conduira à la deuxième possibilité.

b) Le minimum se trouve en l'un des quatre points du carré. Ce point est alors considéré comme le centre d'un nouveau carré construit de la même façon qu'en a) et le processus se poursuit.

La ligne brisée passant ainsi par le point minimum à chaque itération est considérée comme une approximation de la ligne de "plus grande pente" utilisée dans la méthode de la "Steepest Descent".

L'algorithme doit donc, en principe, converger vers un minimum local, à la précision choisie près.

Il est à noter que le procédé ne semble pas être altéré par la présence de racines multiples. La précision obtenue sera généralement moins bonne, mais la méthode est à priori également convergente dans ces cas là.

REMARQUE :

Le carré choisi aurait pu être remplacé par un triangle équilatéral dont z_0 serait le centre de gravité. D'après MOTTELER, cette construction est souvent plus avantageuse que le carré (gain de calculs), mais échoue pour certains polynômes qui sont résolus par la méthode adoptée. Dans le cas du triangle, il semblerait que "l'encadrement" de la région considérée autour de z_0 soit quelquefois insuffisant. On aurait pu penser alors, augmenter le nombre de points. Pour garder une certaine symétrie, il aurait fallu prendre par exemple un hexagone, d'où un accroissement considérable du nombre de calculs, pour une hypothétique diminution du nombre de polynômes non résolus.

L'algorithme adopté nous a donné satisfaction pour tous les polynômes testés (cf. § 5), même les plus mal conditionnés.

3.2. Difficultés rencontrées - Modifications apportées

a) Si le point initial z_0 est loin d'une racine et si le pas est petit, le processus peut être long. Il faudra donc prévoir une "accélération" dans un tel cas.

Pour cela nous multiplierons le pas par un coefficient élevé (par exemple 10) si au bout de 5 étapes le pas n'a pas diminué, c'est-à-dire si un minimum n'a pas été localisé à l'intérieur des différents carrés considérés.

Le pas initial a été pris égal à 0.5 dans les quatre directions des axes ; au bout de 5 étapes nous aurons donc progressé en valeur absolue de 2.5 dans chaque direction. En multipliant par 10 le pas, nous avançons de 5, c'est-à-dire le double.

Nous avons pu cependant remarquer lors des essais que le choix des

paramètres 5 et 10 n'a rien de fondamental.

b) il est déconseillé également, de partir avec un pas très grand, ce qui peut présenter au moins deux inconvénients :

- convergence vers une racine de grand module, donc en principe, perte de précision sur les racines suivantes (cf. [56]),
- présence de plusieurs minima locaux à l'intérieur du carré, d'où risque d'oscillations dans les itérations.

Le choix de $d = 0.5$ avec la modification a) a été l'un des meilleurs constatés lors des essais.

c) Il se peut aussi qu'au voisinage du point de départ, la surface $u = S(x,y) = |P(x+iy)|$ présente un maximum extrêmement aplati, de telle sorte que les valeurs de $|P(z)|$ pour les cinq points considérés ne diffèrent que de petites quantités et cependant ces points sont éloignés d'une racine (le cas est différent de celui de a)). Il est donc nécessaire encore là, d'accélérer le processus.

Si à la 1ère itération les $P(z_1)$ sont voisins, nous recommençons avec un pas plus grand (par exemple 10) et si à la 2ème itération, le même phénomène se reproduit, nous modifions la valeur initiale et repartons avec le pas d'origine.

Le processus - augmentation du pas, plus modification de la valeur initiale si nécessaire - se reproduit jusqu'à ce que la convergence démarre réellement.

d) Choix de la valeur initiale - Cas des points de selle

Il est logique de penser à l'origine comme point de départ de façon à obtenir, approximativement, les racines par ordre croissant.

Ce choix conduit à des résultats faux pour certains types de polynômes, en particulier ceux de la famille $z^{4n} + c = 0$. La surface $u =$

$|P(x+iy)|$ avec $P(z) = z^4 - 1$ a un point de selle à l'origine et la méthode étudiée converge vers 0 qui n'est évidemment pas racine.

Nous retrouvons le même phénomène que pour Bairstow, ce qui est normal, car cette dernière méthode peut être aussi considérée comme un cas particulier de la "Steepest Descent" (cf. MOORE-CLARK [36]).

Dans les essais, le problème s'est posé à l'origine, mais il se peut qu'au cours d'un calcul, la convergence se fasse vers un point de selle autre que l'origine.

MOTTELER [37] propose de choisir arbitrairement $z_0 = 1/2$ ou $\left| \frac{a_n}{a_0} \right|^{1/n}$. En fait, nous garderons $z_0 = 0$ qui a l'avantage de fournir les racines par modules croissants et de conduire à de bons résultats dans la majorité des exemples traités.

Nous éviterons l'écueil précédent, en procédant de la manière générale suivante : dès qu' "une valeur qui peut être racine" sera localisée dans un carré dont les $\frac{1}{2}$ côtés sont inférieurs ou égaux à la précision demandée, nous testerons la valeur de $|P(z)|$ ou $|g(\tilde{z})|$ suivant que $|z|$ est $\leq$ ou $>$ à 1. (g étant le polynôme réciproque de $P_n(z)$ et $\tilde{z} = \frac{1}{z}$).

Si cette valeur est supérieure à ε' choisie arbitrairement plus grande que la précision désirée ε , nous ajouterons une certaine quantité (par ex : $1.33 - i0.79$) à z_0 et cette nouvelle valeur servira de nouveau point de départ à l'algorithme. Un message indiquera la présence d'un point de selle.

Dans le cas contraire, nous considérerons avoir atteint une racine bien que la précision souhaitée sur $|P(z)|$ ou $|g(\tilde{z})|$ ne soit pas atteinte (cas de polynômes mal conditionnés, ou de précision exigée trop forte).

REMARQUES :

- Pour ε' nous avons choisi arbitrairement 10^{-3} . Ce choix nous a donné satisfaction pour les essais effectués.

- Pourquoi ajouter (1.33-i0.79) ?

Ce choix n'est pas totalement arbitraire. Lors des premiers essais, nous avons ajouté (2- il.5). Ces valeurs sont des multiples de 0.5, pas choisis au départ. Pour le polynôme z^8+1 , l'algorithme nous ramène systématiquement au point de selle 0. Il était donc nécessaire de prendre des valeurs non symétriques et surtout non multiples de 0.5.

De cette manière, les deux polynômes z^8+1 et z^4+1 ont pu être traités sans difficulté.

3.3. Tests de fin de calcul

Quatre tests d'arrêt ont été prévus.

a) Une valeur z est localisée dans un carré de $\frac{1}{2}$ côté $< \epsilon$, si $|P(z)|$ ou $|g(\tilde{z})| < \epsilon'$ alors z est considéré comme racine α .

On peut noter qu'alors la racine est complètement localisée dans un carré de côté maximum $= 2\epsilon$.

b) Soit z_m le point minimal parmi les cinq points considérés.

Si $|P(z_m)|$ ou $|g(\tilde{z}_m)| < \epsilon$ (sans obligatoirement que le pas soit réduit à ϵ), les itérations s'arrêtent, on considère que z_m est racine.

c) Il peut arriver que pour les cinq points, les $|P(z_i)|$ soient très voisins, sans que a) ou b) ait fonctionné; le procédé risque alors de boucler.

C'est pourquoi, dès que les $5|P(z_i)|$ sont considérés comme voisins (leur différence en valeur absolue $< \epsilon$) et si $|P(z)|$ ou $|g(\tilde{z})| < \epsilon'$, alors la valeur centrale est prise pour racine; sinon nous pouvons admettre la présence d'un point de selle.

d) Enfin, le test classique de sécurité sur le nombre maximal d'itérations est prévu, mais il devrait, en principe, ne jamais fonctionner (les tests précédents devant suffir).

REMARQUE :

Comme pour la plupart des méthodes étudiées, dès qu'une racine α est trouvée, nous testons $|P(\bar{\alpha})|$ ou $|g(\tilde{\alpha})|$ par rapport à $100 * \epsilon$. Le processus est bien sûr itératif. (Si $\bar{\alpha}$ est racine, on teste $\bar{\alpha} = \alpha \dots$ jusqu'à ce que le test sur $|P|$ ou $|g| \leq 100 * \epsilon$ ne fonctionne plus.

4 - Résultats

4.1. Polynôme $z^4 + 1 = 0$

Résultats avec $\epsilon = 1.10^{-10}$:

0 point de selle $\Rightarrow$ modifications

Racines	{	0.707 106 781 192 123 9	- i	0.707 106 781 192 123 9	70 itér.
		0.	+	i 0.	0
		-0.	+	i 0.	62
		-0	-	i 0.	0

$$|P_n(\alpha_i)| = 0.3 \cdot 10^{-10}.$$

4.2. Polynôme à racines voisines P_{34}

$$\epsilon = 1.10^{-13}$$

Résultats :

{	0.889 999 985	en 36 itérations
	0.900 000 014	47 -
	0.909 999 995	55 -
	0.880 000 004	0 -

4.3. Polynôme à coefficient complexe P_{21}

$$\epsilon = 1.10^{-10}$$

Résultats :

{	0.098 684 113 472 700 1	+ i	0.455 089 860 595 762 7	63 itérations
	1.0	- i	0.1 10^{-9}	36 -
	2.0	+	i 0.0	4 -
	2.0	+	i 0.0	0 -
	-2.098 684 113 472 700	- i	0.455 089 860 479 347 4	0 -

4.4. Polynôme du 6ème degré à coefficients symétriques P_{22}

Les racines exactes (i,i,i,-i,-i,-i,-i) ont été trouvées en deux itérations, du fait de la valeur initiale et de l'accroissement de 0.5 dans les directions des axes.

L'exemple n'est donc pas significatif.

4.5. Polynômes à racines multiples $(z^2+z+2)^4(z^2+z+3)^4 = 0$

Avec $\epsilon = 1.10^{-10}$ nous avons obtenu en 295 itérations :

-0.500000000000000000D+00	0.132031250000000000D+01
-0.500000000000000000D+00	-0.132031250000000000D+01
-0.500000000000000000D+00	-0.165625000000000000D+01
-0.500000000000000000D+00	0.165625000000000000D+01
-0.500000000000000000D+00	-0.1325469970703125D+01
-0.500000000000000000D+00	0.1325469970703125D+01
-0.500000000000000000D+00	0.1660400390625000D+01
-0.500000000000000000D+00	-0.1660400390625000D+01
-0.4974212050437927D+00	-0.1322860062122345D+01
-0.4974212050437927D+00	0.1322860062122345D+01
-0.4979243874549866D+00	-0.1658299565315247D+01
-0.4979243874549866D+00	0.1658299565315247D+01
-0.5025787954218686D+00	0.1322860085871071D+01
-0.5025787954218686D+00	-0.1322860085871071D+01
-0.5020756120793521D+00	0.1658299628179520D+01
-0.5020756120793521D+00	-0.1658299628179520D+01

Nous pouvons noter que les résultats sont relativement bons.

REMARQUE :

Comme pour LEHMER, on pourrait lui associer une méthode à convergence rapide. Il suffirait alors de demander une précision faible, en peu d'itérations ; nous aurions une bonne approximation et une application d'une méthode du 4 ème ou 5 ème ordre permettrait d'obtenir de bons résultats dans le cas de racines simples séparées .

5 - Conclusion ;

La méthode étudiée est particulièrement intéressante car elle ne fait intervenir aucun calcul de dérivée. Elle n'est pas très affectée par la présence de racines multiples et peut être utilisée pour des polynômes à coefficients complexes.

Elle est avantageusement comparable du fait de sa simplicité à la méthode de "Steepest Descent" ou de BACHMANN [1] qui découlent de la même idée. Il est préférable, comme pour la méthode de Lehmer, de lui associer une méthode à forte convergence de façon à diminuer le temps de calcul qui peut être relativement long si l'algorithme seul est utilisé.

Chapitre III

-

M E T H O D E S A U N P O I N T

D' A P P U I

- A -

Méthodes du type NEWTON

1 - Introduction

C'est, sans doute, une des plus anciennes méthodes de résolution des équations numériques. Elle est encore, certainement, une des plus utilisées. Son "succès" est dû principalement à sa simplicité et à son ordre de convergence relativement élevé (deux pour des racines simples). Elle est de plus, généralisable aux polynômes à coefficients complexes.

Les cas de non-convergence sont rares, nous les étudierons ultérieurement.

Le "coût" en calculs d'une itération est faible (Calculs de $f(z)$ et $f'(z)$ seulement).

C'est donc une méthode, aisément utilisable et très satisfaisante dans la majeure partie des cas.

Nous verrons, en même temps, dans ce chapitre, d'autres méthodes directement inspirées de celle de Newton, et qui, en principe, sont une amélioration de cette dernière.

La convergence deviendra alors d'ordre plus élevé (cubique par exemple), par l'addition de termes supplémentaires correctifs, c'est le cas des méthodes dites de Newton améliorée et Halley entre autres.

La deuxième amélioration envisageable concerne le cas des racines multiples pour lesquelles la convergence de la méthode de Newton est faible (linéaire).

Nous introduirons alors, une méthode faisant intervenir l'ordre de multiplicité de la racine et qui, en principe, ramène la convergence à l'ordre 2. Nous appellerons cette méthode : Newton-P.

2 - Formule de NEWTON-RAPHSON

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad \text{dans } \mathbb{C} \quad \text{ou} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{dans } \mathbb{R} .$$

Elle peut être obtenue de différentes manières. Nous en citons ici quelques unes.

a) Comme l'indique OSTROWSKI [41], nous pouvons considérer le polynôme d'interpolation qui approxime $f(x)$ de telle sorte que les deux points d'interpolation coïncident.

Nous avons par exemple, $x_1 = x_2 = a$ et connaissons $f(a)$ et $f'(a)$.

Le polynôme d'interpolation est donc :

$$f(a) + (x-a) \times f'(a)$$

En l'égalant à zéro, nous retrouvons $x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ avec $f'(a) \neq 0$.

b) C'est aussi une des solutions des formules itératives attribuées à Chebyshev et étudiées particulièrement par TRAUB [51].

Il s'agit de la formule :

$$E_p(x) = x - \sum_{j=1}^{p-1} Y_j u^j \quad \text{avec } u = \frac{f}{f'}, \quad \text{et où } Y_j \text{ satisfait à l'équation}$$

différentielle aux différences suivantes :

$$j Y_j(x) - 2(j-1)A_j(x)Y_{j-1}(x) + Y'_{j-1}(x) = 0$$

$$\text{avec } Y_1(x) = 1 \quad A_r(x) = \frac{f^{(r)}(x)}{r!f'(x)} .$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } j = 1 & \quad Y_1 = 1 \\ j = 2 & \quad Y_2 = A_2 \\ j = 3 & \quad Y_3 = 2A_2^2 - A_3 \quad \text{etc ...} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On retrouve } E_2 &= x - \frac{f}{f'}, \quad \text{Newton} \\ E_3 &= x - \frac{f}{f'} - \frac{f''}{2f'} \left(\frac{f}{f'} \right)^2 \quad \text{Newton améliorée} \end{aligned}$$

REMARQUE :

C'est aussi un cas particulier de la formule de Schröder mise sous la forme $x = \varphi(x)$ avec :

$$\varphi(x) = x - \frac{f}{f'} - \frac{f''f^2}{2f'^3} - \frac{3f''^2 - f'f'''}{6f'^5} f^3 - \dots$$

3 - Théorème fondamental de convergence

La suite $\{x_n\}$, définie ci-dessus converge-t-elle vers une racine quand $n \rightarrow \infty$?

Le théorème est démontré dans le cas réel, mais peut se généraliser au cas complexe.

3.1. Théorème (cf. OSTROWSKI [41] et LANCASTER [29])

Soit . $f(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x ,

$$\cdot f(x_0) \cdot f'(x_0) \neq 0$$

$$\cdot h_0 = - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{et} \quad x_1 = x_0 + h_0$$

Considérons l'intervalle $J_0 : (x_0, x_0 + 2h_0)$ tel que $f''(x)$ existe dans J_0 , et est bornée ($\max_{x \in J_0} |f''(x)| = M$) et tel que

$$2|h_0| M \leq |f'(x_0)| \quad (1).$$

Avec ces hypothèses, en partant de x_0 , les éléments de la suite $\{x_n\}$ fournie par $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ($n = 0, 1, \dots$) sont dans J_0 et

nous avons $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ où α est le seul zéro dans J_0 .

En plus, nous avons les relations suivantes :

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|^2} \leq \frac{M}{2 |f'(x_n)|}$$

$$\text{et } |\alpha - x_{n+1}| \leq \frac{M}{2 |f'(x_n)|} |x_n - x_{n-1}|^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

3.2. Démonstration (cf. [38])

Soient . $M = \sup |f''(x)|$ pour $x \in [x_0, x]$

$$. \quad h_0 = x_1 - x_0$$

On obtient facilement les deux relations suivantes :

$$|f'(x_1)| \geq \frac{|f'(x_0)|}{2}$$

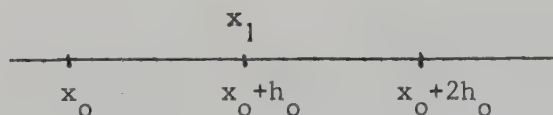
et

$$|f(x_1)| \leq \frac{1}{2} |h_0|^2 M$$

$$\text{d'où } |h_1| = \frac{|f(x_1)|}{|f'(x_1)|} \leq \frac{|h_0|^2 M}{|f'(x_0)|}$$

Avec l'hypothèse (1) du théorème, on en déduit que :

$$|x_2 - x_1| \leq \frac{1}{2} |x_1 - x_0| \quad (2)$$



D'après (2), x_2 se trouvera à une distance $\leq \frac{1}{2} |h_0|$ de x_1 et sera donc dans $J_0 : [x_0, x_0 + 2h_0]$.

En plus, l'intervalle $J_1 : [x_1, x_1 + 2h_1]$ sera $\subset J_0$ car
 au maximum $|h_1| = \frac{|h_0|}{2} \Rightarrow x_1 + 2h_1 \leq x_1 + h_0$.

A l'égalité on se trouve sur la frontière de J_0 .

En outre le rayon de J_1 (moitié de la mesure) est la moitié, au maximum de celui de J_0 puisque $|h_1| \leq \frac{|h_0|}{2}$.

En généralisant, on a :

$$J_n : [x_n, x_n + 2h_n]$$

$J_{n+1} \subset J_n$. Le rayon de J_{n+1} est au plus égal à la moitié de celui de J_n .

Donc, le rayon diminue au minimum de moitié à chaque itération.

Une telle suite converge vers un point que l'on appellera α et, étant donné que chaque intervalle est inclus dans J_0

$$\Rightarrow \alpha \in J_0$$

• α est-il un zéro de $f(x)$?

$$\text{Nous avons } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\begin{aligned} \text{quand } n \rightarrow \infty \quad x_{n+1} &\rightarrow \alpha \\ x_n &\rightarrow \alpha \end{aligned}$$

On a donc à la limite :

$$f'(\alpha)\alpha = f'(\alpha)\alpha - f(\alpha) \Rightarrow f(\alpha) = 0 \text{ donc } \alpha \text{ est bien racine de } f(x).$$

• Est-ce un zéro simple ?

Pour tout x à l'intérieur de J_0 , on a :

$$|x - x_0| < 2|h_0|$$

$$\Rightarrow |f'(x) - f'(x_0)| < |x - x_0| M \leq 2|h_0| M$$

$$\text{Mais } 2|h_0| M \leq f'(x_0)$$

$$\Rightarrow |f'(x) - f'(x_0)| < |f'(x_0)|$$

Donc $f'(x) \neq 0$ pour x intérieur à J_0 .

On en déduit alors que α est dans ce cas racine simple, sinon $f'(x)$ serait nul.

REMARQUE :

Cas limite quand α est sur la frontière $\forall x_0$:

$$\alpha = x_0 + 2h_0 \quad \alpha = x_0 - \frac{2f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \frac{x_0 - \alpha}{2} = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\text{Log } \frac{f(x_0)}{c} = 2 \text{ Log } (x_0 - \alpha) = \text{Log}(x_0 - \alpha)^2$$

$$f(x_0) = c(x_0 - \alpha)^2$$

Plus généralement, $f(x) = c(x - \alpha)^2$ $x = \alpha$ est alors une racine double.

Le théorème est démontré. Les relations proposées se trouvent alors aisément ,

$$\text{on a } |h_n| \leq \frac{|h_{n-1}|^2 M}{|f'(x_{n-1})|}$$

$$\text{Mais } |f'(x_n)| > \frac{1}{2} |f'(x_{n-1})|$$

$$\Rightarrow |h_n| \leq M \frac{|h_{n-1}|^2}{2|f'(x_n)|} \quad n = 1, 2, \dots$$

c'est-à-dire :

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|^2} \leq \frac{M}{2|f'(x_n)|}$$

D'autre part, α appartient à un intervalle de centre x_{n+1} de rayon $|h_n| \Rightarrow$

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq |h_n| \leq M \frac{|h_{n-1}|^2}{2|f'(x_n)|}$$

$$\Rightarrow \frac{|\alpha - x_{n+1}|}{|x_n - x_{n-1}|^2} \leq \frac{M}{2|f'(x_n)|}$$

3.3. Enoncé du théorème dans $\mathbb{C}$

Soit $f(z)$ une fonction complexe de la variable z , dans un voisinage de z_0 , $f(z_0) \cdot f'(z_0) \neq 0$, $h_0 = -\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}$, $z_1 = z_0 + h_0$.

Considérons le cercle K_0 : $|z - z_1| \leq |h_0|$ et supposons que :

• $f(z)$ est analytique dans K_0 ,

• $\max_{K_0} |f''(z)| = M$

• $2|h_0|M \leq |f'(z_0)|$.

Formons, en partant de z_0 , la suite z_v , obtenue par récurrence :

$$z_{v+1} = z_v - \frac{f(z_v)}{f'(z_v)} \quad (v = 0, 1, \dots)$$

Alors $\forall v$, $z_v \in K_0$, nous avons $z_v \rightarrow \alpha$ ($v \rightarrow \infty$) où α est le seul zéro dans K_0 . S'il n'est pas sur la frontière de K_0 , quel que soit v , α est un zéro simple.

3.4. Conclusion

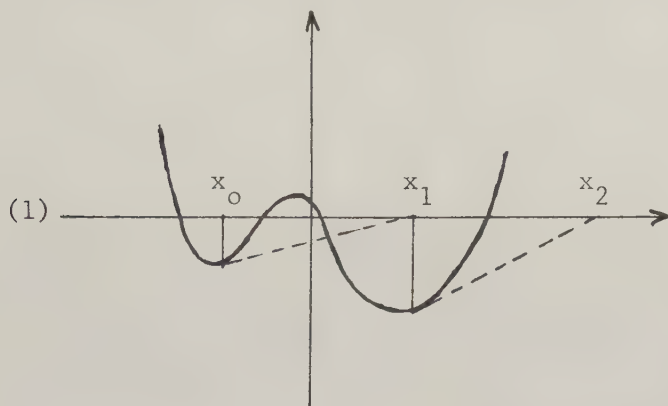
Ce théorème permet donc d'assurer que si, à partir d'une certaine itération, on a $2|h_n|M \leq |f'(x_n)|$ alors la suite $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge vers une racine de $f(x)$.

On peut donc aussi en déduire, qu'à priori la méthode de **Newton** pourra ne pas converger, en particulier des difficultés se présenteront lorsque la dérivée s'annulera dans l'intervalle.

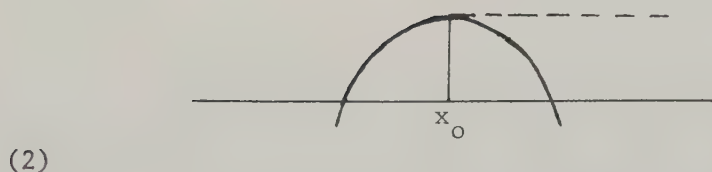
Nous allons retrouver une partie de ces problèmes sur des exemples graphiques.

4 - Cas de non-convergence possible de la méthode de Newton-Raphson

4.1. La valeur de départ est proche d'un extrêmemum



Cas de divergence ou de convergence lente.



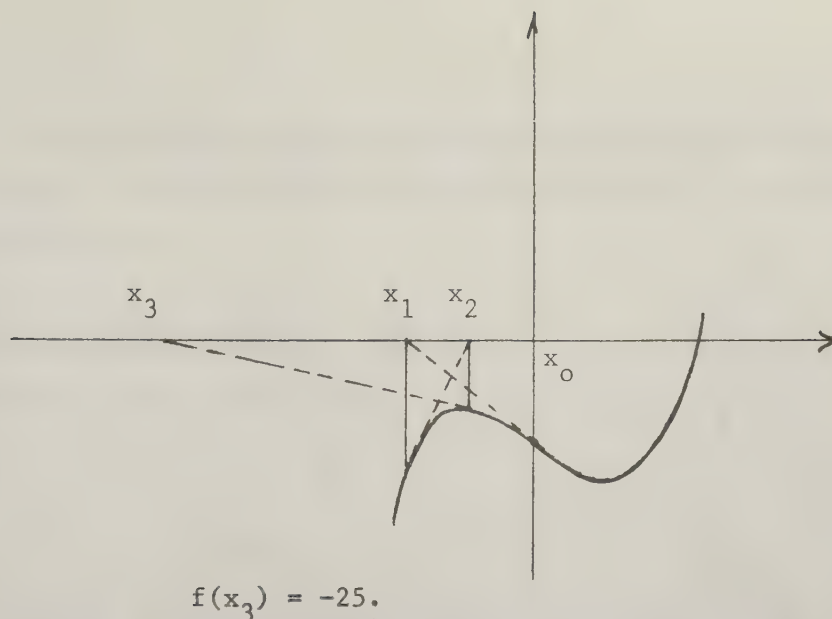
Cas extrême où il peut il avoir divergence :
le point de départ est un extrêmemum ($f'(x_0) = 0$)

REMARQUES :

. Dans les programmes, il sera donc indispensable de tester à chaque itération la valeur de la dérivée première.

. Dans le cas de la figure (1), s'il n'y a pas OVERFLOW pour $f(x_2)$, ($|f(x_2)| < 1.10^{-75}$), on peut espérer converger vers une racine après de nombreuses itérations,

$$\text{ex : } x^3 - x - 1 = 0$$

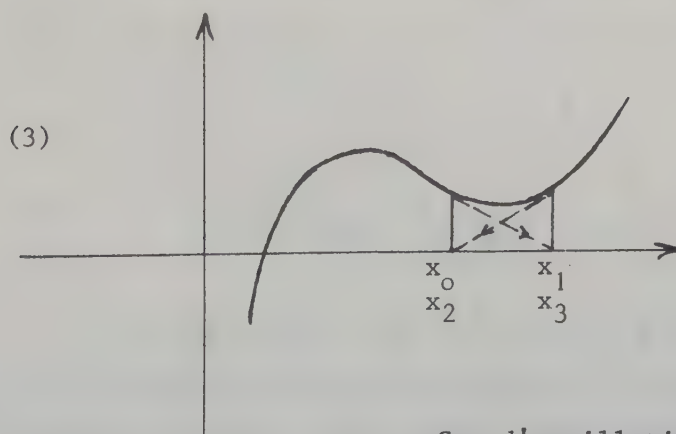


En fait, après de nombreuses oscillations (20), on arrive à la racine qui est 1.324718 ..

. De même, les erreurs inhérentes à l'ordinateur (comme l'arrondi par exemple), permettent parfois de ne pas être exactement au point qui mène à la divergence et par là même, conduisent à une racine.

Dans la figure (2), il suffit d'une petite variation sur x_0 pour permettre à la méthode de converger.

4.2. La dérivée première change de signe dans $J_0 : [x_0, x_1]$

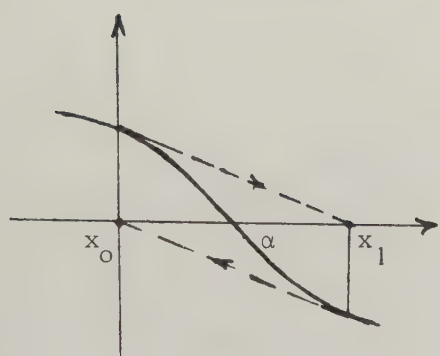


Cas d'oscillations en nombre illimité.

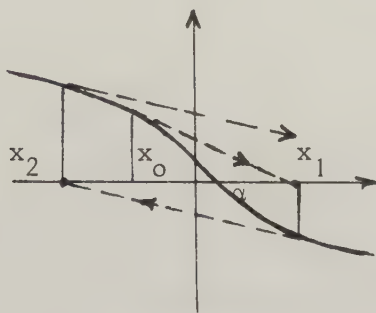
Les mêmes remarques que précédemment sont évidemment applicables. Une erreur d'arrondi machine, sur le calcul de x_2 , peut déclencher la convergence.

4.3. $f''(x)$ change de signe dans $J_0 : [x_0, x_1]$

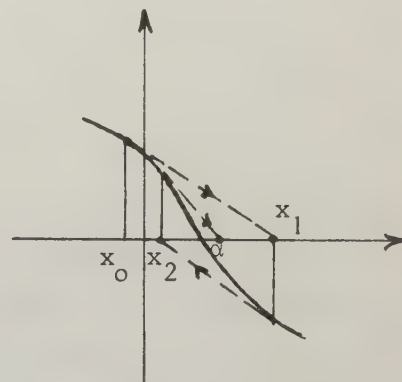
(voisinage d'un point d'inflexion)



Oscillations
en nombre
infini.



Eloignement de
la racine.

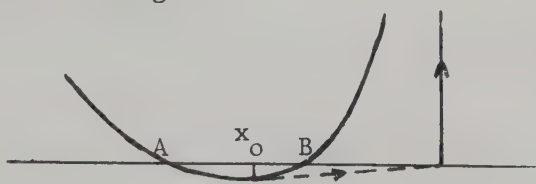


Convergence

4.4. Cas particuliers

Le cas des racines doubles ou multiples sera traité ultérieurement, mais la présence de deux racines voisines peut entraîner des difficultés de convergence.

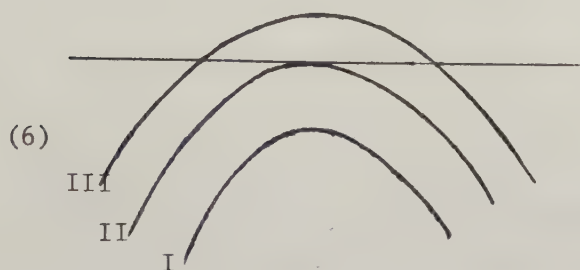
(5)



Il est certain que la présence d'un x_1 entre les deux racines A et B peut entraîner un éloignement brutal pour l'itération suivante et le retour éventuel à une racine (pas obligatoirement A ou B) nécessitera sans doute un grand nombre d'itérations.

Nous pouvons déjà noter que suivant la précision demandée, les deux racines A et B pourront être considérées comme confondues ou non.

Autres cas particuliers :



Une petite modification sur la valeur des coefficients peut entraîner une modification de la courbe. C'est ainsi que l'on pourra passer d'aucune racine réelle (I) à une

racine double (II), ou à deux racines réelles simples (III).

Ce phénomène n'est pas spécial aux polynômes mal-conditionnés. Il se retrouvera, en particulier, dans le cas de polynômes quotient, c'est-à-dire obtenus après division par les racines précédemment trouvées.

A la limite, pour un programme exécuté en réel, certaines racines ne seront pas trouvées (étant considérées comme complexes), alors qu'elles sont effectivement réelles et qu'un choix différent du point de départ aurait, peut être, permis de les trouver.

Ce phénomène est dû principalement à la propagation des erreurs machine sur le calcul de la fonction ou de sa dérivée, les erreurs se compensant plus ou moins suivant la valeur x considérée.

4.5. Remarques

Nous pouvons aussi nous poser la question de savoir s'il peut exister des fonctions telles que la valeur approchée donnée par Newton soit plus mauvaise que la valeur de départ quelle que soit celle-ci, cf. WEINER [54] .

Le problème est donc de savoir s'il existe $f(x)$ continue, avec dérivées continues dans R , telle que :

$$\left| x - \frac{f}{f'}, -\alpha \right| > |x - \alpha| \quad \forall x \neq \alpha \quad (1)$$

ou

$$\left| (x-\alpha) - \frac{f}{f'} \right| > |x - \alpha| \quad \forall x \neq \alpha$$

Cette inégalité sera vérifiée dans les quatre cas suivants :

- a) $(x-\alpha) > 0 \quad \frac{f}{f'} < 0$
- b) $(x-\alpha) > 0 \quad \frac{f}{f'} > 0 \quad \text{mais} \quad \left| \frac{f}{f'} \right| > 2|x-\alpha|$
- c) $(x-\alpha) < 0 \quad \frac{f}{f'} > 0$
- d) $(x-\alpha) < 0 \quad \frac{f}{f'} < 0 \quad \text{mais} \quad \left| \frac{f}{f'} \right| > 2|x-\alpha|$

. Pour a), $\forall x > \alpha$, f et f' doivent être de signes opposés.

C'est impossible. En effet, cela impliquerait que, si f est supérieure à zéro, elle est monotone décroissante pour $x > \alpha$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $f > 0$, puisque $f = 0$ pour $x = \alpha$.

Si f est inférieure à 0, on aurait la même contradiction.

. Pour c), un raisonnement similaire à a) conduirait à la même conclusion.

. Pour b), $(x-\alpha) > 0 \quad \frac{f}{f'} > 0 \quad \text{mais} \quad \left| \frac{f}{f'} \right| > 2|x-\alpha|$
c'est-à-dire $\forall x > \alpha$ on a $|f'| < \frac{1}{2} \left| \frac{f}{x-\alpha} \right|$,

$$\text{Cependant, } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{2} \left| \frac{f(x)}{x-\alpha} \right| = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \alpha} \left| \frac{f(x)}{x-\alpha} \right| = \frac{1}{2} f'(\alpha) \quad ,$$

mais $\lim_{x \rightarrow \alpha} f'(x) = f'(\alpha)$, donc contradiction, puisque la fonction et ses dérivées sont continues par hypothèse.

. Pour d), on aboutit à la même contradiction qu'en b).

Donc la réponse à la question posée est négative.

Mais, par contre, comme dans 4.1, 4.2, 4.3, il est possible de trouver des valeurs spécifiques x_0 qui donnent des approximations de plus en plus mauvaises.

Si nous considérons non plus l'inégalité (1), mais l'égalité $\left| x - \frac{f}{f'}, -\alpha \right| = |x - \alpha| \quad \forall x \neq \alpha$,

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-\alpha) - \frac{f}{f'} = x-\alpha \\ \text{ou} \\ x-\alpha - \frac{f}{f'} = -x+\alpha \end{array} \right.$$

La première relation est sans intérêt ($\frac{f}{f'} = 0$)

La deuxième conduit à l'équation différentielle

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{2(x-\alpha)}$$

$$f(x) = c \sqrt[4]{(x-\alpha)^2}$$

Cette fonction a la propriété que, quel que soit x_0 ,

$$x_1 - \alpha = -(x_0 - \alpha) \quad (\text{oscillation})$$

La méthode ne converge pas dans ce cas là. Il faut cependant noter que $f(x)$ trouvée n'est pas un polynôme.

Donc, en conclusion, quel que soit le polynôme, il existe une infinité de points de départ pour lesquels la convergence de la méthode de Newton-Raphson est assurée.

Par contre, comme nous l'avons vu, sur les exemples graphiques, un nombre fini de points initiaux peuvent conduire, sinon à la divergence de la méthode, mais à des difficultés de convergence.

En outre, nous pouvons en conclure que si $(x-\alpha)$ et $\frac{f(x)}{f'(x)}$ sont de même signe, alors $|\frac{f}{f'}| < 2|x-\alpha|$ entraîne que $|x - \frac{f}{f'}, -\alpha| < |x-\alpha|, \forall x \neq \alpha$, c'est-à-dire que l'approximation est meilleure à chaque nouvelle itération.

5 - Ordre de convergence de la méthode de Newton-Raphson

5.1. Cas de racines simples $f'(\alpha) \neq 0$

En se plaçant dans un voisinage de la racine α , on peut utiliser un développement de Taylor,

$$f(\alpha) = 0 = f(x_0 + \alpha - x_0) = f(x_0) + (\alpha - x_0)f'(x_0) + \frac{(\alpha - x_0)^2}{2} f''(\zeta)$$

$$\zeta \in]x_0, \alpha[$$

Si $f'(x_0) \neq 0$,

$$\implies 0 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + (\alpha - x_0) + \frac{(\alpha - x_0)^2}{2} \frac{f''(\zeta)}{f'(x_0)}$$

$$\text{Mais } x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\implies (\alpha - x_1) = -\frac{(\alpha - x_0)^2}{2} \frac{f''(\zeta)}{f'(x_0)}$$

Plus généralement, on peut écrire :

$$(\alpha - x_{p+1}) = -\frac{1}{2} \frac{f''(\zeta_p)}{f'(x_p)} (\alpha - x_p)^2 \quad \zeta_p \in]x_{p+1}, \alpha[$$

Donc la méthode de Newton, si $f'(\alpha) \neq 0$ est du deuxième ordre. Le facteur de convergence K est égal à la limite à $-\frac{1}{2} \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$. Cela signifie qu'asymptotiquement, si x_p à m décimales exactes, on peut espérer que x_{p+1} aura $2m$ décimales exactes.

5.2. Cas de racines multiples

Nous savons que pour les formules itératives du type $x_{i+1} = \varphi(x_i)$, (α étant une racine), si :

$\varphi'(\alpha) \neq 0$ la méthode est du 1er ordre,

$\varphi'(\alpha) = 0$, $\varphi''(\alpha) \neq 0$ la méthode est du 2ème ordre,

et plus généralement si $\varphi'(\alpha) = 0, \dots, \varphi^{(n-1)}(\alpha) = 0, \varphi^{(n)}(\alpha) \neq 0$ la convergence est du n ième ordre.

Dans le cas de la formule de Newton-Raphson,

$$\varphi'(x) = \frac{ff''}{f'^2}$$

Si $f'(\alpha) \neq 0$ $f''(\alpha) \neq 0$;

$\implies \varphi'(\alpha) = 0$ puisque $f(\alpha) = 0$, la méthode est du second ordre comme nous l'avons vu ci-dessus.

Par contre, si le polynôme de degré n a des racines multiples c'est-à-dire :

$$f(x) = (x-\alpha)^p h(x) \quad \text{avec degré de } h(x) + p = n$$

$$f'(x) = p(x-\alpha)^{p-1}h(x) + (x-\alpha)^p h'(x)$$

$$\varphi(x) = x - \frac{(x-\alpha)^p h(x)}{p(x-\alpha)^{p-1}h(x) + (x-\alpha)^p h'(x)}$$

Au dénominateur $(x-\alpha)^p$ est négligeable par rapport à $(x-\alpha)^{p-1}$ quand $x \rightarrow \alpha$.

On a approximativement, au voisinage de α :

$$\varphi(x) \approx x - \frac{(x-\alpha)}{p}$$

$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{p} \neq 0$ si $p \neq 1$, c'est-à-dire dans le cas des racines multiples.

Nous pouvons en conclure que pour de tels polynômes, la convergence est du 1er ordre.

$|\varphi'(\alpha)|$ étant le facteur de convergence, il est d'autant plus voisin de 1 que p est grand.

5.3. Condition suffisante de convergence

Les méthodes itératives de la forme $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ convergent si $|\varphi'(x)| < 1$.

On peut appliquer ce résultat à la méthode de Newton-Raphson

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \implies \text{c.s.} \quad \left| 1 - \frac{(f')^2 - ff''}{f'^2} \right| < 1$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \left| \frac{ff''}{f'^2} \right| < 1$$

6 - Généralisation de la méthode de Newton-Raphson au cas des polynômes à racines multiples

6.1. Formule faisant intervenir l'ordre de multiplicité

Soit . $f(x)$ un polynôme à racines multiples
 . $f'(x)$ sa dérivée première.

Considérons la fonction $F(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Cette fonction n'a pas de point singulier puisque les zéros de $f'(x)$ sont ceux de $f(x)$ avec un ordre de multiplicité inférieur.

Nous pouvons donc appliquer la formule de Newton à la fonction $F(x)$ qui n'a que des racines simples. La méthode est alors du second ordre.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

$$F'(x) = \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)} .$$

D'où, en remplaçant

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{f'^2(x_n)}{f'^2(x_n) - f(x_n)f''(x_n)} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Nous retrouvons là une formule proposée par DURAND [13] ..., qui est du second ordre quel que soit l'ordre de multiplicité des racines calculées (cf. 7.1.3.)

Nous allons voir que le coefficient

$$\frac{f'^2(x_n)}{f'^2(x_n) - f(x_n)f''(x_n)} \quad \text{quand } x \rightarrow \alpha, \text{ tend vers une constante qui est}$$

l'ordre de multiplicité de la racine considérée.

En effet,

$$\text{soit } f(x) = (x-\alpha)^p h(x) \quad h(x) \text{ est bornée et } h(\alpha) \neq 0$$

$$f'(x) = p(x-\alpha)^{p-1}h(x) + (x-\alpha)h'(x)$$

$$f''(x) = p(p-1)(x-\alpha)^{p-2}h(x) + 2p(x-\alpha)^{p-1}h'(x) + (x-\alpha)^p h''(x)$$

quand $x \rightarrow \alpha$.

$$(I) \quad \begin{cases} f(x) = (x-\alpha)^p h(x) \\ f'(x) = p(x-\alpha)^{p-1} h(x) + \sigma_1 (x-\alpha)^p \\ f''(x) = p(p-1)(x-\alpha)^{p-2} h(x) + \sigma_2 (x-\alpha)^{p-1} \end{cases}$$

On sort p de ces expressions :

$$\Rightarrow \quad \left| \quad p = \lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f'^2}{f'^2 - ff''} \right) \right.$$

Si donc on peut déterminer p , la méthode de Newton généralisée $x_{n+1} = x_n - p \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ sera du second ordre quel que soit l'ordre de multiplicité de la racine calculée.

Pour des racines simples, nous avons alors $p = 1$, $(f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha), f''(\alpha) \neq 0)$ et nous retrouvons la formule classique.

REMARQUES:

a) On peut voir aisément sur (I), que le quotient de deux dérivées successives donnera une approximation de $x-\alpha$.

C'est ainsi que l'on a :

- avec f et f' $\alpha \approx x - p \frac{f}{f'}$, déjà trouvé,
- avec f' et f'' , $\frac{f'}{f''} \approx \frac{p(x-\alpha)^{p-1} h(x)}{p(p-1)(x-\alpha)^{p-2} h(x)} = \frac{1}{(p-1)} (x-\alpha)$

$$\Rightarrow \quad \alpha \approx x - (p-1) \frac{f'}{f''} \quad \text{ou la récurrence } x_{n+1} = x_n - (p-1) \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

Plus généralement, nous aurons :

$$x_{n+1} = x_n - (p-k) \frac{f^{(k)}(x_n)}{f^{(k+1)}(x_n)} .$$

Nous retrouvons ainsi, d'une autre manière, les résultats proposés par KORGANOFF [26] .

De plus, il en sort une formule donnant l'ordre de multiplicité p .

$(p-k+1) \frac{f^{(k-1)}}{f^{(k)}} = (p-k) \frac{f^{(k)}}{f^{(k+1)}}$ puisque toutes les formes précédentes sont semblables.

Il propose de prendre p comme étant l'entier le plus proche de

$$k + \frac{\frac{f^{(k-1)}}{f^{(k)}}}{\frac{f^{(k)}}{f^{(k+1)}} - \frac{f^{(k-1)}}{f^{(k)}}}$$

b) Tous les résultats des paragraphes 5) et 6) peuvent être généralisés à des polynômes à racines complexes multiples et à des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Nous avons ainsi

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

ou

$$z_{n+1} = z_n - p \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

(La fonction $F(z) = \frac{f(z)}{f'(z)}$ est holomorphe dans tout le plan).

Pour la suite, nous appellerons cette dernière formule, la formule de NEWTON-P.

6.2. Convergence de la méthode de NEWTON-P

Avant d'étudier la convergence de la méthode, nous allons étudier celle de la formule itérative qui, quand $z \rightarrow \alpha$, donne p .

6.2.1. Convergence de $\frac{f'^2(z)}{f'^2(z) - ff''(z)}$ quand $z \rightarrow \alpha$

Soit $f(z)$ un polynôme défini dans $\mathbb{C}$ ayant une racine de multiplicité p .

Au voisinage de la racine, le développement de Taylor donne :

$$f(z) = f(\alpha + z - \alpha) = \frac{(z-\alpha)^p f^{(p)}(\alpha)}{p!} + \frac{(z-\alpha)^{(p+1)} f^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!} + \mathcal{O}(z-\alpha)^{p+2}$$

puisque $f'(\alpha), \dots, f^{(p-1)}(\alpha) = 0$.

$$\text{Posons } a_p = \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!}$$

$$f(z) = a_p (z-\alpha)^p + a_{p+1} (z-\alpha)^{p+1} + \mathcal{O}_1 (z-\alpha)^{p+2}$$

Par dérivation nous aurions $f(z)$ et $f'(z)$.

D'où :

$$\frac{f'^2(z)}{f'^2(z) - ff''(z)} =$$

$$\frac{p^2 a_p^2 (z-\alpha)^{2p-2} + 2p(p+1) a_p a_{p+1} (z-\alpha)^{2p-1} + \mathcal{O}_1 (z-\alpha)^{2p}}{p a_p^2 (z-\alpha)^{2p-2} + 2p a_p a_{p+1} (z-\alpha)^{2p-1} + \mathcal{O}_2 (z-\alpha)^{2p}}$$

En divisant haut et bas par $p a_p^2 (z-\alpha)^{2p-2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow &= \frac{p + 2(p+1) \frac{a_{p+1}}{a_p} (z-\alpha) + \mathcal{O}_1 (z-\alpha)^2}{1 + 2p \frac{a_{p+1}}{a_p} (z-\alpha) + \mathcal{O}_2 (z-\alpha)^2} \\ &= \left[p + 2(p+1) \frac{a_{p+1}}{a_p} (z-\alpha) \right] \left[1 - 2p \frac{a_{p+1}}{a_p} (z-\alpha) \right] + \mathcal{O}(z-\alpha)^2 \end{aligned}$$

$$\left| \frac{f'^2(z)}{f'^2 - ff''} = p + \frac{2a_{p+1}}{a_p} (z-\alpha) + \mathcal{O}(z-\alpha)^2 \right|$$

On en déduit que $\frac{f'^2}{f'^2 - ff''}$ converge linéairement vers p quand $z \rightarrow \alpha$.

Nous retrouvons ainsi les résultats proposés par DEKKER [7] .

6.6.2. Convergence de NEWTON-P

Nous avons déjà vu précédemment que la convergence était quadratique quel que soit l'ordre de multiplicité. Nous allons retrouver ce résultat, et de plus, déterminer le facteur de convergence.

A partir de $f(z)$ et $f'(z)$ définis dans 6.2.1, nous obtenons de la même manière que dans le paragraphe précédent :

$$\frac{f(z)}{f'(z)} = \frac{(z-\alpha)}{p} \left(1 - \frac{a_{p+1}}{a_p} \frac{(z-\alpha)}{p} + O(z-\alpha)^2 \right)$$

$$\text{avec } a_p = \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!}$$

D'où $z_{n+1} = z_n - p \frac{f(z_n)}{f'(z)}$ devient :

$$z_{n+1} = z_n - \left[(z_n - \alpha) \left(1 - \frac{a_{p+1}}{a_p} \frac{(z_n - \alpha)}{p} + O(z_n - \alpha)^2 \right) \right]$$

$$\implies z_{n+1} - \alpha = \frac{a_{p+1}}{p a_p} (z_n - \alpha)^2 + O(z_n - \alpha)^3$$

$$\frac{\alpha - z_{n+1}}{(\alpha - z_n)^2} \rightarrow \frac{a_{p+1}}{p a_p} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty .$$

Nous retrouvons la convergence quadratique et le facteur de convergence est donné par :

$$\left| \frac{a_{p+1}}{p a_p} = \frac{f^{(p+1)}(\alpha)}{p(p+1)f^{(p)}(\alpha)} \right|$$

Le résultat est démontré différemment par OSTROWSKI [41] et TRAUB [51] .

6.2.3. Remarque

a) Que se passe-t-il si l'ordre de multiplicité calculé (q) est différent du réel (p) ?

Dans Newton-P, nous utiliserons alors la formule :

$$z_{n+1} = z_n - q \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

En utilisant les résultats de 6.2.2., il vient :

$$z_{n+1} = z_n - \frac{q}{p} (z_n - \alpha) + \frac{q}{p^2} \frac{a_{p+1}}{a_p} (z_n - \alpha)^2 + \dots$$

$$(z_{n+1} - \alpha) = (z_n - \alpha) - \frac{p}{q} (z_n - \alpha) + \frac{q}{p^2} \frac{a_{p+1}}{a_p} (z_n - \alpha)^2 + \dots$$

$$(z_{n+1} - \alpha) = (z_n - \alpha) \left(1 - \frac{q}{p}\right) + \frac{q}{p^2} \frac{a_{p+1}}{a_p} (z_n - \alpha)^2 + \dots$$

Nous retrouvons le résultat de 6.2.2. si $q = p$.

Si $q \neq p$, la convergence est linéaire, mais le facteur de convergence sera d'autant meilleur que q est voisin de p .

C'est pourquoi BODEWIG [5] propose, si la racine est supposée multiple ($f'(x)$ petit) et si l'ordre de multiplicité est inconnu à priori, de prendre $q = 2$ ou $q = 3$.

Cette méthode a l'inconvénient d'être totalement arbitraire et surtout d'abaisser l'ordre de convergence dans le cas de racine simple voisine d'un extrémum.

Si $q < p$, la méthode est dite sous corrigée (RALL [43])

$q > p$, est sur-corrigée.

b) Dans le programme utilisant Newton-P, nous essaierons de déterminer p à l'aide de la formule pour n assez grand:

$$\frac{f'^2(z_n)}{f'^2(z_n) - f(z_n)f''(z_n)}$$

Comme nous venons de le voir, si le résultat est inexact, la convergence sera moins rapide et la précision généralement plus faible, mais une bonne approximation de la racine sera quand même obtenue.

C'est la raison pour laquelle, ce procédé a été préféré à la méthode proposée par LAGOUANELLE [27], que nous citerons cependant du fait de sa simplicité si l'ordre de multiplicité est connu avec certitude.

Soit $P_r(z)$ un polynôme de degré r

$$P_r(z) = (z-\alpha)^p Q_{r-p}(z)$$

On considère le polynôme suivant dont α est racine simple :

$$P_{r+1-p}(z) = (z-\alpha) Q_{r-p}(z)$$

Soit d_i ($i=0, \dots, r+1-p$) les coefficients de ce polynôme.

On cherche une relation entre ses coefficients et ceux de $P_r(z)$.

$$P_r(z) = \sum_{i=0}^r a_i z^{r-i} \quad \text{avec } a_0 = 1$$

$$P'_r(z) = rz^{n-1} + \dots + (r-1)a_1 z^{r-2} + \dots + a_r$$

Si nous dérivons $(p-1)$ fois :

$$P_r^{(p-1)}(z) = r(r-1) \dots (r-p+2)z^{r-p+2} + (r-1)(r-2) \dots (r-p+1)z^{r-p} + \dots$$

On peut alors l'identifier avec $P_{r+1-p}(z)$,

d'où

$$d_0 = r(r-1) \dots (r-p+2)$$

$$d_1 = r(r-1)(r-2) \dots (r-p+1)a_1 = (r-1)((r-1)-1) \dots ((r-1)-(p-2))a_1$$

$\vdots$

$$d_i = (r-i) \dots (r-p+2-i)a_i = (r-i)((r-i)-1) \dots ((r-i)-(p-2))a_i$$

$$\text{D'où plus généralement } \left\{ \begin{array}{l} d_i = a_i \prod_{j=0}^{p-2} (r-i-j) \quad \forall i \end{array} \right.$$

Nous pouvons donc obtenir, assez aisément, les coefficients de ce nouveau polynôme qui a α comme racine simple et lui appliquer Newton classique.

Cependant, les difficultés se présenteront, en particulier, lorsque des racines voisines seront considérées comme multiples ; les erreurs sur les coefficients d_i peuvent être alors importantes.

7 - Quelques autres méthodes, à un point d'appui, dont l'ordre de convergence est supérieur ou égal à celui de NEWTON

7.1. Famille de fonctions itératives de la forme

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n) f(x_n)}{g(x_n) f'(x_n) + h(x_n) f(x_n)} \quad (I) .$$

h et g sont des fonctions de x arbitraires.

Ce n'est qu'une généralisation de la méthode de Newton par addition d'un terme correctif $(\frac{h}{g} f)$ au dénominateur.

Ces méthodes conduisent bien à une racine de $f(x)$, car lorsque $x \rightarrow \alpha$ $f(\alpha) \rightarrow 0$ plus vite que $f'(\alpha)$, donc $\frac{gf}{gf' + hf} \rightarrow 0$.

7.1.1. Ordre de convergence de ces méthodes

Nous avons la forme $x = \varphi(x)$

Calculons $\varphi'(\alpha)$,

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{(gf)'}{(gf' + hf)} + \frac{gf (gf' + hf)'}{(gf' + hf)^2}$$

$$\implies \varphi'(\alpha) = 1 - \frac{gf'}{gf'} = 0 .$$

Puisque $\varphi'(\alpha) = 0$, la méthode est donc au moins du 2ème ordre $\forall h$ et g .

$$\text{De la même façon} \quad \varphi''(\alpha) = \frac{2h(\alpha)}{g(\alpha)} + \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

7.1.2. Méthode de HALLEY-RICHMOND

Dans le cas général $\psi'(\alpha)$ sera différent de zéro, sauf si $\frac{h(x)}{g(x)} = -\frac{1}{2} \frac{f''(x)}{f'(x)}$, auquel cas $\psi''(\alpha) = 0$ et la méthode devient au moins du 3ème ordre.

Donc,
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) f'(x_n)}{f'^2(x_n) - \frac{1}{2} f(x_n) f''(x_n)}$$
 est une méthode

à convergence cubique.

Suivant les auteurs, elle est appelée, méthode de HALLEY ou de RICHMOND (cf. TRAUB [50], KORGANOFF [26], WYNN [58]).

REMARQUE :

Nous pouvons noter que cette méthode est aussi un cas particulier d'une famille de méthodes itératives proposée par KORGANOFF [26], à partir de la méthode de König.

De même, c'est une des formules, données par TRAUB [51] et obtenues par approximations rationnelles de la "formule d'Euler".

Enfin, c'est une des méthodes de la famille

$$(II) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{ff'}{f'^2 - bff''} \quad \text{où } b \text{ est une constante.}$$

Nous étudierons la convergence dans ce cas plus général.

Convergence :

En utilisant le développement de Taylor de f , f' , f'' comme en 6.2.1., nous obtenons :

$$(III) \quad x_{n+1}^{-\alpha} = - \frac{(x_n - \alpha)(p-1)(b-1)}{(p+b - pb)} - \frac{a_{p+1}}{a_p} \frac{(pb+b-p)}{p(p+b-pb)} 2^{(x_n - \alpha)^2} + O((x_n - \alpha)^3)$$

- p étant l'ordre de multiplicité de la racine,

$$- a_p = \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!} \quad a_{p+1} = \frac{f^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}$$

Dans le cas de la formule de Halley-Richmond $b = \frac{1}{2}$.

Si en plus $p = 1$, on retrouve bien la convergence cubique, mais si $p \neq 1$, alors la convergence redevient linéaire avec un facteur de convergence $= \frac{p-1}{p+1}$; donc plus p est grand, plus la convergence est lente.

Dans le cas d'une racine simple et en prenant un terme supplémentaire dans les développements de f, f', f'' , nous obtiendrons le facteur de convergence de la méthode de Halley, qui est :

$$\frac{3(f''(x))^2 - 2f'(x)f'''(x)}{12(f'(x))^2}$$

Nous pouvons en conclure avec WYNN [58] que cette méthode est particulièrement recommandée pour des racines simples.

7.1.3. Autre méthode proposée par exemple par BODEWIG [5] , DURAND [13] etc...

C'est un cas particulier simple de (I), en prenant

$$\frac{h(x)}{g(x)} = - \frac{f''(x)}{f'(x)} .$$

$$\text{Nous avons alors } x_{n+1} = x_n - \frac{ff'}{f'^2 - ff''} .$$

$$\varphi'(\alpha) \text{ est toujours nulle, mais } \varphi''(\alpha) = - \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

En fait, nous retrouvons là, la méthode de Newton-P mais sans calcul de l'ordre de multiplicité.

Elle nécessite, à chaque itération, le calcul de $f''(x)$, ce que nous éviterons, en partie, dans Newton-P.

En faisant $b = 1$, dans (II) et (III), nous trouvons :

$$(x_{n+1} - \alpha) = \frac{-a_{p+1}}{p a_p} (x_n - \alpha)^2 + O(x_n - \alpha)^3 \quad \forall p$$

Nous retrouvons ainsi les résultats de 6.2.2.

7.2. Méthode de Newton-améliorée

C'est aussi, comme la méthode Halley-Richmond, une méthode du 3ème ordre.

Elle peut être obtenue directement à partir du développement de Taylor autour de la racine α .

$$f(\alpha) = 0 = f(x) + (\alpha-x)f'(x) + \frac{(\alpha-x)^2}{2!} f''(x) + \frac{(\alpha-x)^3}{3!} f'''(\zeta)$$

$$\zeta \in]x, \alpha[$$

Dans une 1ère approximation, on néglige f''

$\Rightarrow \alpha - x = -\frac{f}{f'}$, et on remplace $(\alpha-x)$ par sa valeur dans l'expression ci-dessus.

$$0 = f(x) + (\alpha-x)f'(x) + \left(\frac{f^2}{f'^2}\right) \frac{f''}{2} + \frac{(\alpha-x)^3}{3!} f'''(\zeta)$$

En négligeant le terme en $(\alpha-x)^3$, nous obtenons la formule bien connue, dite de Newton-améliorée

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f^2(x_n)f''(x_n)}{2f'^3(x_n)}$$

C'est la formule de Newton, plus un terme correctif $\left(\frac{-f^2 f''}{2f'^3}\right)$ qui rend la convergence cubique pour une racine simple.

Comme pour Newton, la convergence restera linéaire pour des racines multiples.

REMARQUE :

Les trois formules précédentes sont, aussi, valables dans $\mathbb{C}$.

8 - Méthodes testées - Analyse des programmes

8.1. Méthode de NEWTON

Deux programmes ont été réalisés, l'un en réel et l'autre en complexe. Bien qu'il soit un cas particulier du programme en complexe, le programme en réel n'est cependant pas inutile.

Si toutes les racines du polynôme étudié sont réelles, nous aurons un gain de temps de calcul appréciable avec ce programme.

De plus, il peut être intéressant de n'obtenir que les racines réelles d'un polynôme donné et dans ce cas, surtout si le nombre de racines réelles est faible par rapport au degré du polynôme, le programme en réel sera plus efficace et rapide.

Dans l'étude qui suit, nous nous placerons dans $\mathbb{C}$.

8.1.1. Analyse générale du programme

Après la lecture du degré, des coefficients du polynôme, de la précision souhaitée et du nombre maximal d'itérations, nous calculons les coefficients du polynôme réciproque.

Le degré est alors testé pour savoir s'il est nul ou égal à 1, ce qui conduit à une sortie quasi-immédiate.

Dans le cas général, nous nous donnons alors la valeur initiale z_0 (par affectation ou par lecture).

Avant d'appliquer l'algorithme, il est indispensable, à chaque itération, de tester la dérivée lère. Si elle est voisine de 0 sans que le polynôme soit nul, nous ajoutons une quantité arbitraire $(0.5+0.5i)$ à z_0 et le calcul pourra repartir.

La convergence se poursuit et la sortie se fera généralement à l'aide d'un des deux tests suivants :

$$a) \left| \frac{(z_2 - z_1)}{z_2} \right| < \frac{\epsilon}{100}$$

z_1, z_2 étant deux valeurs itérées consécutives

ϵ : précision demandée

b) Le deuxième test de précision dépend du module de z_2 (la dernière itérée)

$$\begin{array}{ll} |z_2| \leq 1 & |f(z_2)| < \epsilon \\ |z_2| > 1 & |g(\frac{1}{z_2})| < \epsilon \end{array}$$

où g est le polynôme réciproque de f .

Si au bout d'un certain nombre d'itérations fixé au départ (lecture) une racine n'est pas atteinte, on modifie la valeur initiale en la multipliant par un facteur arbitraire.

La racine α trouvée est placée dans un tableau.

La division du polynôme de travail par $(z-\alpha)$ se fait alors.

Si cette racine α n'est pas la dernière, la valeur conjuguée de la racine est testée ; si $\bar{\alpha}$ est racine, le nouveau polynôme est divisé par $(z-\bar{\alpha})$ et le processus est itératif. Ainsi $\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}} = \alpha, \bar{\alpha} \dots$ peuvent être déterminés sans itération jusqu'à ce que le test ne fonctionne plus, ce qui résoud en partie le cas des racines complexes conjuguées et multiples.

Pour tenir compte des erreurs de calculs dues à la division, le test utilisé est comme en b) mais la précision demandée est légèrement plus faible ($100 * \epsilon$).

Après épuisement de cette dernière boucle, le calcul est renvoyé à la lecture d'une nouvelle valeur initiale z_0 .

8.1.2. Difficultés rencontrées - Modifications proposées.

a) En principe, l'arrêt se fera à l'aide de l'un des deux tests précédents ; mais la précision désirée peut ne pas être atteinte, soit qu'elle soit trop grande, soit que le polynôme soit mal conditionné ou à racines multiples.

Normalement, à chaque itération, la précision s'accroît, $|f(z)|$ diminue jusqu'à une certaine valeur à partir de laquelle, la valeur de la fonction commence à osciller sans amélioration sensible. Il faut donc arrêter les itérations dès que $|f(z)|$ augmente lorsqu'on fait une itération supplémentaire (ce test sur les oscillations se retrouve dans de nombreuses méthodes).

b) En fait, ce test seul est insuffisant ; en effet, lors des lères itérations, les valeurs de la fonction pour les différents z_i encore éloignés d'une racine, peuvent osciller aléatoirement. Elles se stabilisent ensuite, et enfin, se mettent généralement à converger.

. Exemple d'oscillations pour des z_i éloignés d'une racine.

Soit le polynôme P_{24} .

Après l'obtention d'une racine, nous itérons sur le polynôme quotient du 15ème degré avec $(1+i)$ comme valeur initiale.

Nous avons obtenu :

$$z_5 = -0.761\ 176\ 404\ 872\ 059 + i\ 1.553\ 192\ 818\ 764\ 636 \quad |f(z_5)| \approx 2$$

$$z_6 = -0.300\ 396\ 094\ 699\ 136 + i\ 1.753\ 454\ 967\ 769\ 345 \quad |f(z_6)| \approx 3$$

$|f(z_6)| > |f(z_5)|$ donc oscillations sur des valeurs éloignées de la racine.

Il est donc indispensable d'appliquer ce test au voisinage de la racine seulement. Ce sera le cas, en principe, lorsque deux itérations successives seront peu différentes.

Si . z_1 est l'avant dernière itération calculée, $f(z_1) = F_1$,

. z_2 est la dernière itération calculée, $f(z_2) = F_2$.

nous testerons alors $\frac{|z_2 - z_1|}{|z_2|}$ par rapport à 0.1 .

REMARQUE :

Un premier test avait été fait, non sur le module de différence comme ci-dessus, mais sur la différence des modules. Dans l'exemple donné plus haut, les deux itérations z_5 et z_6 ont même module, tout en étant très différentes !

a) et b) nous assurent de la convergence vers un point, mais ce dernier peut ne pas être une racine (point de selle par exemple).

$$c) \text{ Si } \frac{|z_2 - z_1|}{|z_2|} < 0.1$$

. $|F_2| > |F_1|$ on peut converger vers un point de selle .

Exemple : (voir page suivante)

LES COEF. DU POLY. APRES DEFLATION SONT

0.9999999999999999 00 0.0
0.8999999999999999 01 0.1016264691735986D-22
0.5999999999999999 01 0.1219517370093163D-21
-0.5790000000000000 03 0.4268312545291143D-21
-0.3758999999999999 04 -0.4683679959564019D-20
-0.3989999999999999 04 -0.5201243715904778D-19
0.1519999999999999 05 -0.1965862806574092D-18
0.2399999999999999 05 -0.4352865784283577D-18

LA VALEUR INITIALE EST 0.9999999999999999 00 0.9999999999999999 00

ITERATIONS

2	0.2254018769630383D 01	0.2182694473016028D 01	0.1906983373110429D 05	-0.107726514 870276D 06
3	0.1985981801634661D 01	-0.4008791354399771D 01	0.5266694541118337D 06	-0.561303911 409627D 06
4	-0.3594318612749055D 01	0.9285152098053343D 01	0.6240368191170913D 07	-0.252881904 319758D 07
5	-0.5720090765088117D 01	0.3141728611101109D 01	0.195453077373440D 06	-0.131715713 235461D 06
6	-0.7792176758597762D 01	-0.117682947871076D 01	-0.2508055671489812D 06	-0.624593994 083787D 06
7	-0.2208555013534122D 01	0.1419703747063436D 01	-0.1421547360317793D 05	0.441856015 022071D 03
8	-0.2319399074492711D 01	-0.133008206229659D 01	-0.1231455764674014D 05	0.133246386 576983D 04
9	-0.235902342125085D 01	-0.141620556276115D 01	-0.136245864062611D 05	-0.238743126 482198D 04
10	-0.2394979496235372D 01	-0.1364972884753597D 01	-0.1253382024220536D 05	0.277111661 989541D 04
11	-0.2417783620212453D 01	0.1398007747125612D 01	-0.1298501508349361D 05	-0.3348175071576398D 04
12	-0.2430773882325141D 01	-0.1374595264827175D 01	-0.1250311641037177D 05	0.343826722 517702D 04
13	-0.2441702201661556D 01	0.1388336048438016D 01	-0.1267432461344782D 05	-0.370812644 045975D 04
14	-0.2446946216765474D 01	-0.1377860732690453D 01	-0.124824321038996D 05	0.373411002 541376D 04
15	-0.2451956583943641D 01	0.1383797757758258D 01	-0.1253290242580403D 05	-0.385642816 123205D 04
LA METHODE OSCILLE AUTOUR D'UN POINT DE SELLE, ON AJUSTE (1+I) A X(I)				
16	-0.1454194409095433D 01	-0.3791147087991501D 00	0.1423671213434180D 04	-0.379935574 734215D 04
17	-0.1816163026901889D 01	0.103155665067686D 00	-0.4692398462204300D 03	0.606716680 149402D 03
18	-0.1742414773381137D 01	-0.1180546443848865D 01	0.5577281775468691D 02	0.793819759 365261D 02
19	-0.1750834682113586D 01	-0.1708088177906295D 03	0.3549236889512030D 00	-0.113213722 721803D 01
20	-0.1750888235424616D 01	0.1576314624620775D 07	0.1500494254287332D 03	0.104470011 527758D 03
21	-0.1750888258065095D 01	-0.6145235621130329D 15	0.9094947017729281D 12	-0.407274560 939071D 11
22	-0.1750888253065095D 01	0.3372741490620712D 22	-0.9094947017729281D 12	0.115923729 309284D 26

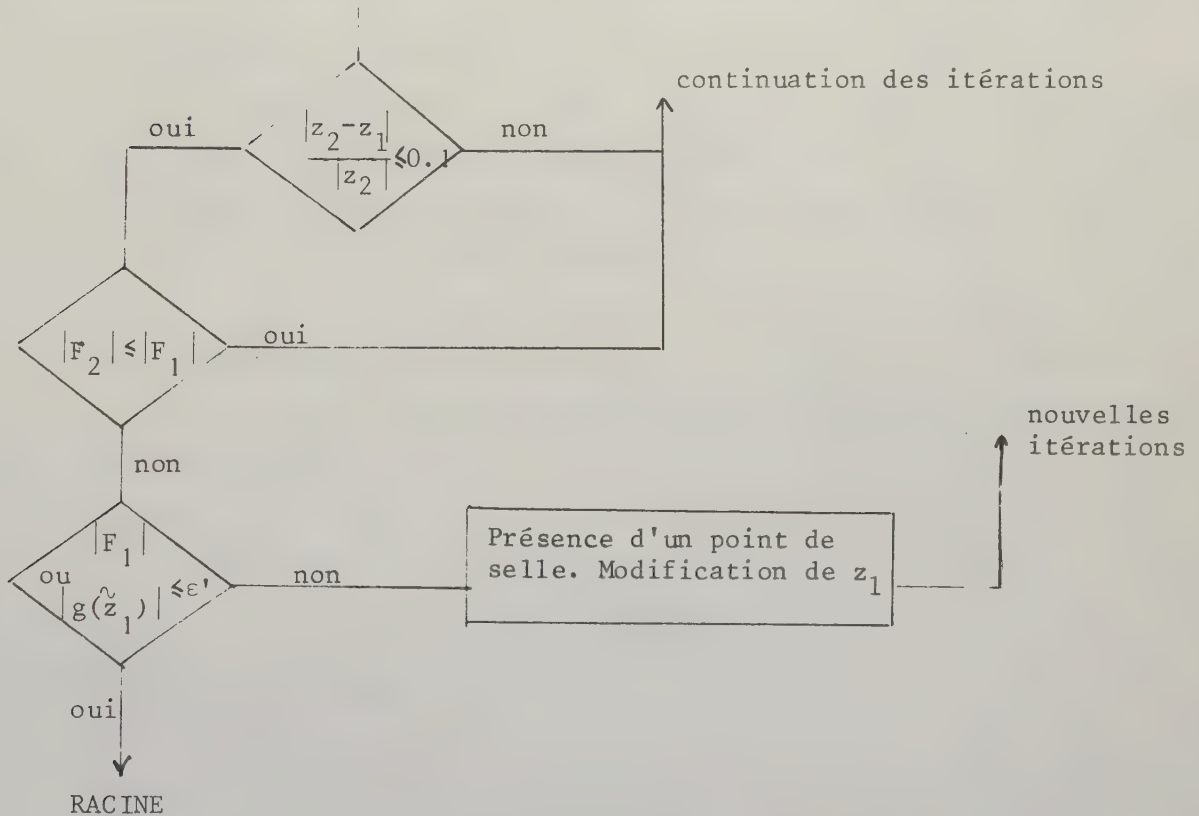
UNE RACINE = -0.1750888258065095D 01 0.3372741490620712D 22 PPN(X) = 0.0 -0.1061956166775842D 17

Un ajustement des deux tests précédents est donc nécessaire. Nous testerons donc $|F_1|$ ou $|g(\hat{z}_1)|$ (suivant $|z_1| \gtrless 1$) par rapport à une précision ε' beaucoup plus grande que ε (précision souhaitée), mais significative cependant.

Si $\varepsilon = 1.10^{-i}$ alors nous prenons $\varepsilon' = 1.10^{-j}$ avec $j = \frac{i}{3}$.

Donc, si nous nous trouvons au voisinage d'un point de selle (qui n'est pas racine) les deux premières conditions seront satisfaites mais non la 3ème.

Nous avons en définitive, la séquence de tests suivante :



REMARQUE :

Lorsqu'il y a oscillations, celles-ci sont aléatoires. Il est donc préférable de s'arrêter dès la 1ère. La racine ainsi trouvée n'est certes ni la meilleure, ni la plus mauvaise, mais elle a l'avantage d'être obtenue rapidement.

8.1.3. Entrées-Sorties

- Le polynôme est lu comme dans les méthodes précédentes,
- La valeur initiale est imposée dans le programme. Nous l'avons prise arbitrairement égale à $0.5 + i 0.5$ de façon à obtenir en premier, les racines de modules < 1 . (ce qui n'est cependant pas totalement assuré).

Il peut être envisagé de lire cette valeur initiale, en particulier si on connaît déjà une approximation des racines cherchées.

Nous rappelons cependant qu'une bonne approximation d'une racine ne conduit pas forcément, après application de l'algorithme, à cette racine.

Certains auteurs préconisent d'autres valeurs de départ
 JARRATT [21] propose: $x = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}$, DURAND [13] : $\sqrt{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2\left(\frac{a_2}{a_0}\right)}$,
 DEJEON-NICKEL [9] définit 'un point milieu' = $\frac{-a_1}{na_0}$.

L'avantage de cette dernière valeur est d'être la solution exacte pour $n = 1$. Par contre, si les coefficients sont réels, nous n'obtiendrons que les racines réelles et, en plus elles ne seront pas par ordre de module croissant en général.

En Sortie, nous retrouvons tous les messages correspondants aux cas spéciaux vus en 8.1.2.

En fin, les racines sont écrites dans l'ordre dans lequel elles ont été trouvées.

REMARQUE :

Les résultats numériques se trouvent en 9.

8.2. Méthode de NEWTON-P

La méthode utilisée est celle de Newton simple comme en 8.1., jusqu'à ce que l'ordre de multiplicité p ait pu être déterminé.

On applique alors

$$z_{n+1} = z_n - p \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}.$$

L'algorithme se décompose donc en deux étapes:

- . Application de $z_{n+1} = z_n - \frac{f}{f'}$, et détermination de p
- . Application de $z_{n+1} = z_n - p \frac{f}{f'}$,

Cette méthode est en principe de convergence 2, quel que soit le polynôme. La seule différence avec le programme précédent et la détermination de p .

8.2.1. Cas des racines multiples - Détermination de l'ordre de multiplicité.

Nous avons pris comme polynôme d'essai P_{23} :

$$(z-1)^4(z-2)^3(z-3)^2(z-4) = 0 . \text{ La valeur initiale choisie est } 0.$$

La courbe 1.1. représente les variations de $\frac{f'^2}{f'^2 - ff''}$ en fonction du nombre d'itérations effectuées.

La courbe 1.2. représente les variations de $|p_2 - p_1|$ en fonction des itérations, p_1 et p_2 étant les deux dernières valeurs de $\frac{f'^2}{f'^2 - ff''}$ calculées.

Nous pouvons constater que ce coefficient se stabilise au voisinage de l'ordre de multiplicité réel, dès que l'on est suffisamment proche de la racine (région I). De même, la différence $|p_2 - p_1|$ diminue régulièrement lorsque l'on s'approche de la racine.

Le test $|p_2 - p_1| < 0.1$ est dans ce cas suffisant pour déterminer l'ordre de multiplicité avec, cependant, la restriction que $|f(z_1)|$ ou $|g(\tilde{z}_1)| < 1.10^{-2}$; car si les valeurs z_1 et z_2 sont très éloignées de la racine, p_2 et p_1 peuvent être très voisins sans que cela soit significatif (z_1 et z_2 sont les résultats de deux itérations consécutives obtenues par $z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$).

REMARQUE :

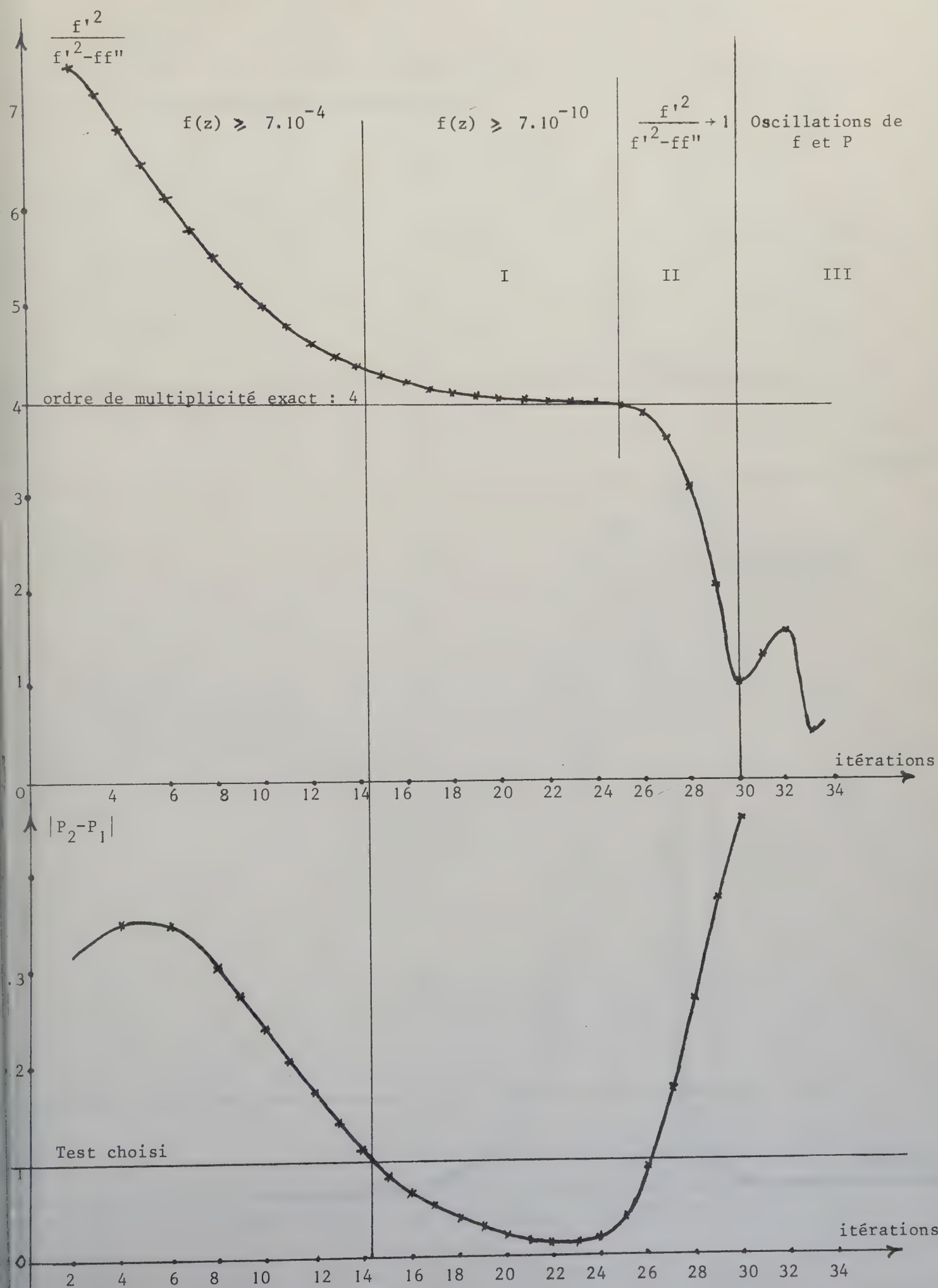
On pourrait prendre une précision sur $|p_2 - p_1|$ plus grande afin d'assurer la valeur de p , mais l'expérience a montré qu'il était nécessaire d'être prudent.

En effet, pour que p_2 et p_1 calculés consécutivement soient très voisins, il faut être très proche de la racine. donc, en général f est alors très petit.

$$f'^2 - ff'' \approx f'^2 \Rightarrow \text{le rapport} \rightarrow 1 \quad (\text{région II du graphe}) .$$

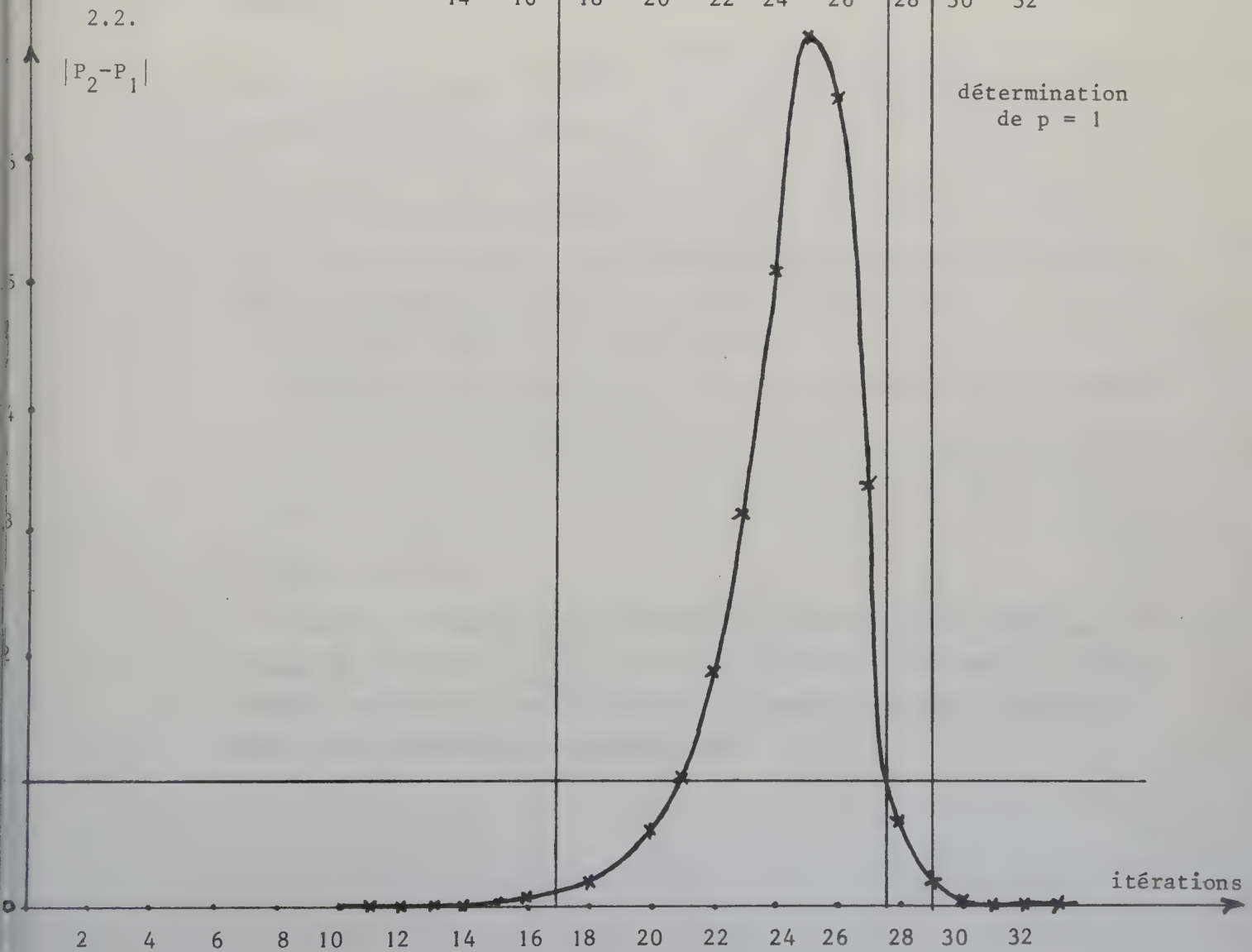
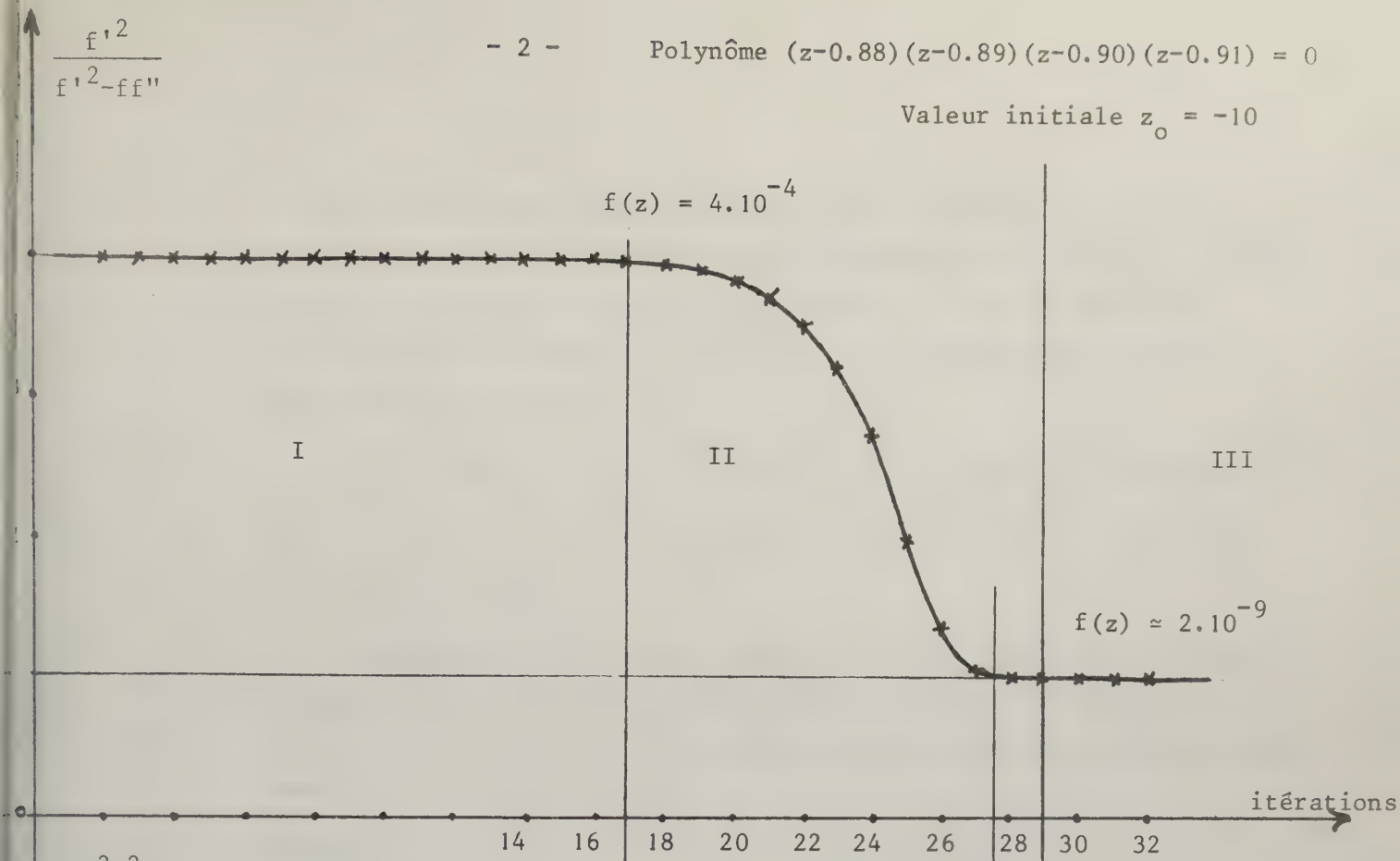
Plus encore, si l'ordre de multiplicité est supérieur ou égal à 3 et que les itérations se poursuivent f, f' et $f'' \approx 0$ et le rapport $\frac{f'^2}{f'^2 - ff''}$ perd toute signification numérique et oscille aléatoirement.

(Région III du graphe 1.1.)



2.1.

- 2 -

Polynôme $(z-0.88)(z-0.89)(z-0.90)(z-0.91) = 0$ Valeur initiale $z_0 = -10$ 

De toutes façons, il y a grand intérêt à connaître, le plus rapidement possible, l'ordre de multiplicité, afin de passer à la 2ème phase de l'algorithme, c'est-à-dire itérer à l'aide de la formule du second ordre $z_{n+1} = z_n - p \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$ (p = partie réelle entière du dernier p_2 calculé).

Dans le programme réalisé, nous ne calculerons les valeurs de $\frac{f'^2}{f'^2 - ff''}$ que lorsque $|f(z_1)|$ ou $|g(\tilde{z}_1)|$ sera inférieur à 1.10^{-2} . Ce calcul faisant appel à la dérivée seconde sera donc ainsi évité pendant de nombreuses itérations.

En conclusion, les deux tests précisés plus haut, sont un compromis entre la rapidité de connaissance et la sûreté du résultat sur p . Notons cependant qu'ils ont été efficaces dans tous les exemples traités, aussi bien dans $\mathbb{R}$ que dans $\mathbb{C}$.

REMARQUE :

Si, éventuellement, pour certains polynômes, la valeur p trouvée n'est pas identique à l'ordre de multiplicité, nous rappelons que la méthode converge quand même (cf. 6.2.3.)

8.2.2. Cas de racines voisines (cf. graphe 2)

Dans le cas général où la valeur de départ est relativement éloignée de la racine, on assiste à un phénomène intéressant.

Soit $\underline{m}$ le nombre de racines "voisines".

La formule itérative $\frac{f'^2}{f'^2 - ff''}$ est à peu près stationnaire pendant longtemps. La partie réelle entière est égale à $\underline{m}$ (Région I de 2.1). La différence $|p_2 - p_1|$ est alors nulle ou à peu près nulle et est donc < 0.1 .

. Régions II et III.

Après un certain nombre d'itérations, lorsque nous sommes au voisinage de la racine, $\frac{f'^2}{f'^2 - ff''}$ se met à décroître brutalement et tend vers la vraie multiplicité de la racine. Les racines voisines ont alors perdu leur caractère de m -multiplicité.

La courbe $|p_2 - p_1|$ se met à croître, passe par un maximum, décroît, puis redevient stationnaire lorsque le rapport $\frac{f'^2}{f'^2 - ff''}$ a atteint la valeur vraie de l'ordre de multiplicité.

Donc, théoriquement, en poussant les calculs suffisamment, on doit trouver l'ordre de multiplicité exact.

En fait, cela va dépendre, nécessairement, de la précision demandée.

. Problèmes rencontrés :

a) Il est bien évident que si la précision souhaitée est faible, les racines très voisines seront considérées comme confondues, sans dommage pour l'utilisateur.

Exemple : Reprenons l'exemple traité sur les graphes (2.1, 2.2.).

. Si le test d'arrêt est $|f| < 1.10^{-3}$, le calcul s'arrêtera à la 17ème itération ; l'ordre de multiplicité probable est alors 4.

. Si $|f| < 1.10^{-7}$ l'ordre de multiplicité probable est 2 .

b) La "dégénérescence" de la formule donnant l'ordre de multiplicité n'a lieu que pour des valeurs très proches de l'une des racines cherchées, $|f(z)|$ est alors, en général petit, si bien qu'à partir d'un certain nombre d'itérations, alors que la multiplicité exacte n'est pas encore trouvée, $\frac{f'^2}{f'^2 - ff''}$ devient instable et se met à osciller sans converger.

On ne pourra dans ce cas rien en déduire.

exemple : $(z-1)^2(z-1.01)(z-1.02) = 0$. La valeur initiale est 0. On converge vers 1. Pendant 11 itérations, $\frac{f'^2}{f'^2 - ff''}$ est stationnaire à 4.

Puis de la 19ème à la 27ème il est stationnaire à 2 .
($|f(z)| > 1.10^{-14}$). Ensuite il oscille aléatoirement en prenant successivement les valeurs 2.20, 1.88, -9.1, -2.19, +216 ...

exemple : $(z-1)^2(z-1.0001)(z-1.0002)$. La valeur initiale est 0.

Pendant les 28 lères itérations, $\frac{f'^2}{f'^2 - ff''}$ est voisin de 4, mais $|p_2 - p_1|$ augmente, à partir de la 29ème ($f(z) \approx 3.10^{-14}$), il se met à osciller et prend les valeurs 4.06, 3.28, 4.92, 2.46 ...

On n'a pas pu atteindre 2.

c) Tests utilisés

En présence de "vraies" racines multiples, la différence $p_2 - p_1$ diminue régulièrement, jusqu'à ce que f, f', f'' étant trop petits, le rapport $\frac{f'^2}{f'^2 - ff''}$ ne soit plus significatif.

Donc, à cet effet, le test $|p_2 - p_1| < 0.1$ donne satisfaction.

Par contre, la présence de racines "voisines" implique, en plus la croissance de $|p_2 - p_1|$ (même si < 0.1) jusqu'à un maximum et sa décroissance ensuite.

Un test supplémentaire sera utilisé.

On dira avoir trouvé p lorsque

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \quad |f| \text{ ou } |g| < 10^{-2} \\ \cdot \quad |p_2 - p_1| < 0.1 \\ \cdot \quad \text{avec la condition que } |p_2 - p_1| \text{ décroisse.} \end{array} \right.$$

Ces trois tests pris successivement nous ont permis de séparer des racines "voisines" telles que, si d est la distance minimale les séparant et $|z|$ leur module, $\frac{d}{|z|}$ doit être supérieur à 0.0001.

Nous appellerons par la suite $\frac{d}{|z|}$ le "coefficient de séparation". La valeur 0.0001 est évidemment empirique et ne doit être considérée que, comme ordre de grandeur.

Cependant, en dessous de cette limite, avec les tests ci-dessus, il y a peu de chance de séparer les racines.

REMARQUES :

a) Comme il était prévisible, la multiplication des racines par un coefficient ne permet pas une meilleure séparation (cf. les essais de 9.2). C'est la longueur de la "distance relative" $(\frac{d}{|z|})$ qui est fondamentale.

b) Si la sortie se fait avant la détermination exacte de p , nous considérons la partie réelle entière du dernier p_2 calculé comme étant l'ordre de multiplicité probable.

8.3. Méthode de HALLEY et NEWTON-améliorée

La programmation est absolument identique à celle de Newton simple. Seule la formule est évidemment modifiée.

A la place de

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

nous prendrons

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f}{f'} - \frac{f^2 f''}{2f'^3}$$

ou

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(2f'^2 - ff'')}{2f'^3} \quad \text{pour Newton-améliorée.}$$

et

$$z_{n+1} = z_n - \frac{ff'}{f'^2 - \frac{1}{2} ff''} \quad \text{pour Halley.}$$

Dans les deux cas, il faut éviter le dénominateur nul par un test sur f' pour la 1ère et sur $f'^2 - \frac{1}{2} ff''$ pour la 2ème.

De plus, pour la méthode de Halley, f' apparaissant aussi au numérateur, peut annuler celui-ci et la convergence alors, ne progresse plus.

Exemple : $f(x) = x^2 - 4$ avec la valeur initiale égale à 0

$$\implies f'(x_0) = 0$$

Il est donc nécessaire de modifier la valeur initiale dans ces cas là.

9 - Résultats numériques des méthodes précédentes

9.1. Comparaison des méthodes de NEWTON et NEWTON-P

Nous prenons 4 types de polynômes différents :

- . à coefficients complexes et à racines réelles multiples,
- . à racines réelles multiples et à coefficients réels,
- . à racines complexes multiples,
- . à racines imaginaires pures multiples.

9.1.1. Polynôme P_{21} dit "mal conditionné"

Résultats comparatifs pour l'obtention de la racine double 2.

(Les 2 premières racines trouvées sont identiques).

$$\epsilon = 1.10^{-13}.$$

Newton Simple			Newton-P		
itér.			itér.		Multiplicité
2ème	1.776	- i 0.3217	2ème	1.776	- i 0.321 7 1
7ème	1.9927	- i 0.89 10 ⁻²	7ème	1.992 7	- i 0.89 10 ⁻² 1
8ème	1.9963	- i 0.44 10 ⁻²	8ème	1.999 998 4	+ i 0.16 10 ⁻⁴ <u>2</u>
9ème	1.9981	- i 0.22 10 ⁻²	9ème	1.999 999 999 89	+ i 0.14 10 ⁻⁹ 2
-----			Arrêt $ f(z) < 1.10^{-13}$		
22ème	1.999 999 77	- i 0.27 10 ⁻⁶			
Arrêt $ f(z) < 1.10^{-13}$					

REMARQUE :

Dès que l'ordre de multiplicité a été trouvé, la convergence devient quadratique et deux itérations seulement sont nécessaires pour atteindre une excellente précision.

Par Newton, la précision a de fortes chances d'être plus faible puisque, la convergence étant lente, l'arrêt se fait dès que le test de précision fonctionne. Avec Newton-P la précision maximale est atteinte rapidement, avant que le test ait pu fonctionner, car à chaque itération nous doublons le nombre de décimales exactes.

Résultats complets (Valeur initiale = 0, pour toutes les racines).

<u>Newton-simple</u>	itérations
0.986 841 134 678 109 <u>0</u> + i 0.455 089 860 562 228 <u>7</u>	(8)
0.999 999 999 999 996 <u>4</u> - i 0. <u>346</u> 10 ⁻¹⁴	(8)
1.999 999 <u>779</u> 736 762 - i 0. <u>272</u> 91 10 ⁻⁶	(22)
2.000 000 <u>220</u> 263 242 + i 0. <u>272</u> 91 10 ⁻⁶	(10)
-2.098 684 113 467 <u>812</u> - i 0.455 089 860 562 <u>1970</u>	(0)

<u>Newton-P</u>	
$z_1 = 0.986\ 841\ 134\ 678\ 109\ \underline{0} + i\ 0.455\ 089\ 860\ 562\ 228\ \underline{7}$	(8)
$z_2 = 0.999\ 999\ 999\ 999\ 996\ \underline{4} - i\ 0.\underline{346}10^{-14}$	(8)
$z_3 = 1.999\ 999\ 999\ \underline{895}\ 812 \pm i\ 0.\underline{144}\ 792\ 1\ 10^{-9}$	(9)
$z_4 = 2.000\ 000\ 000\ \underline{104}\ 189 - i\ 0.\underline{144}\ 790\ 7\ 10^{-9}$	(10)
$z_5 = -2.098\ 684\ 113\ 467\ 809 - i\ 0.455\ 089\ 860\ 562\ 226\ \underline{6}$	(0)

D'après DIMSDALE [12], il était particulièrement difficile d'obtenir la racine double réelle.

Nous constatons sur les résultats, non seulement un gain d'itérations (35/48), mais un gain de précision important. En outre, nous connaissons l'ordre de multiplicité de la racine 2. Nous pouvons donc appliquer les résultats du chapitre (I.2.b.)

En faisant la $\frac{1}{2}$ somme de z_3 et z_4 nous obtenons :

$2 + i\ 0.7\ 10^{-16}$, c'est-à-dire presque le résultat exact.

9.1.2. Polynôme $P_{23} (x-1)^4 (x-2)^3 (x-3)^3 (x-4) = 0$

$\epsilon = 1.10^{-12}$ valeurs initiales = 0

Résultat pour la 1ère racine :

<u>Newton-Simple</u>	ité.	<u>Newton-P</u>	Multiplicité	ité.
0.940 809 ...	14ème	0.940 809	1	14ème
0.954 754 ...	15ème	0.996 590	<u>4</u>	15ème
0.965 555 ...	16ème	0.999 984	4	16ème
0.999 442 ...	31ème	La précision n'est pas atteinte mais $f(z)$ augmente $\Rightarrow$ arrêt à la 16ème		

Résultats complets

- Newton simple

LES RACINES TROUVEES SONT

0.9994426671910144D+00	0.0
0.1000230625974361D+01	0.0
0.9999412941871530D+00	0.0
0.1000386532343466D+01	0.0
0.1988446570579356D+01	0.0
0.2010125000295080D+01	0.0
0.2001722863660926D+01	0.0
0.2984531891449303D+01	0.0
0.3015231249934745D+01	0.0
0.3999941304384589D+01	0.0

en 150 itérations

LES RACINES TROUVEES SONT

0.9999848200065292D+00	0.0
0.9999848200065292D+00	0.0
0.1000020505265732D+01	0.0
0.1000009856841176D+01	0.0
0.1999357770225706D+01	0.0
0.2000231587379475D+01	0.0
0.2000411427918751D+01	0.0
0.2999807559030750D+01	0.0
0.3000191218532347D+01	0.0
0.4000000434792998D+01	0.0

REMARQUES:

NOUS POUVONS CONSIDERER QUE

Z =	0.1000000000529991D+01	0.0	EST RACINE DE MULTIPLICITE	4
Z =	0.2000000026184131D+01	0.0	EST RACINE DE MULTIPLICITE	3
Z =	0.2999999388781548D+01	0.0	EST RACINE DE MULTIPLICITE	2

en 99 itérations ($\sum_{i=1}^{10} \Delta_i = 1.10^{-15}$)

Dans Newton-P, en appliquant les résultats de I.2. , nous doublons le nombre de décimales exactes.

REMARQUE :

En repartant avec, comme valeur initiale la dernière racine trouvée , les résultats sont légèrement améliorés et il y a un gain important d'itérations (81/150 pour Newton Simple, 53/99 pour Newton-P)

9.1.3. Polynôme $P_{24} (z^2+z+2)^4 (z^2+z+3)^4 = 0$

$$\varepsilon = 1.10^{-14}$$

Résultats :

Dans les deux cas, la lère valeur initiale choisie est i, les suivantes sont les conjuguées des racines trouvées.

- Newton Simple

-0.4992579109627899D+00	0.1322519659305163D+01
-0.4992579109627899D+00	-0.1322519659305163D+01
-0.5003036794911724D+00	0.1323021413294134D+01
-0.5006255874955503D+00	-0.1322840601045401D+01
-0.5005091365437409D+00	0.1322370817070533D+01
-0.5002638867093381D+00	-0.1322424632423271D+01
-0.4999292785856023D+00	0.1323590755939885D+01
-0.4998526089730592D+00	-0.1323717752927683D+01
-0.4998349409736420D+00	0.1655532810292794D+01
-0.5001676244203738D+00	-0.1655527333734960D+01
-0.5004825237944050D+00	0.1659348161729612D+01
-0.4995120882202119D+00	-0.1659369896944847D+01
-0.4995120882202119D+00	0.1659369896944847D+01
-0.4997940792702585D+00	-0.1658973390746404D+01
-0.5001701050519209D+00	0.1658995718852751D+01
-0.5005265503249315D+00	-0.1659375966301990D+01

en 105 itérations.

- Newton-P

-0.5001373071566166D+00	0.1323199982717299D+01	multiplicité trouvée : 4
-0.5001373071566166D+00	-0.1323199982717299D+01	
-0.4999409791365734D+00	0.1322731432802458D+01	
-0.4999409791365734D+00	-0.1322731432802458D+01	
-0.4999409791365734D+00	0.1322731432802458D+01	
-0.4999409791365734D+00	-0.1322731432802458D+01	
-0.4999813925506172D+00	0.1322840372467711D+01	
-0.4999813925506172D+00	-0.1322840372467711D+01	
-0.4999578645605061D+00	0.1659145373040426D+01	multiplicité trouvée : 4
-0.5006932336236435D+00	-0.1658416325363547D+01	
-0.5033291895942531D+00	0.1658795606782381D+01	
-0.5029962764365114D+00	-0.1659032880324405D+01	
-0.4998329021060288D+00	0.1658203546083541D+01	
-0.5004435411275841D+00	-0.1655980563110433D+01	
-0.4968762505679103D+00	0.1657110110619242D+01	
-0.4958694260228007D+00	-0.1659824867727206D+01	

en 70 itérations.

En repartant avec la racine trouvée, nous convergions vers les parties imaginaires ayant même signe, ce qui entraînait des erreurs sur le calcul des parties imaginaires de signes contraires.

REMARQUES :

a) Le fait de repartir avec la conjuguée de la racine que l'on vient d'obtenir à l'avantage, en principe, de déterminer rapidement les racines complexes multiples par ordre de module croissant, mais ce n'est pas une loi générale.

Nous avons des contre-exemples pour certains cas particuliers (cf. § 4). Cependant, le problème peut se poser quelque soit le point de départ, c'est pourquoi nous avons adopté ce principe dans un des programmes faits.

b) Puisque nous avons pu, par Newton-P, déterminer l'ordre de multiplicité, nous pourrions utiliser les résultats du chapitre I.2. .

Les sommes donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} -2.000\ 000\ 657\ 980\ 380\ 6 \pm i\ 5.291\ 503\ 220\ 789\ 926 \\ -1.999\ 996\ 206\ 828\ 698\ 3 \pm i\ 6.633\ 254\ 636\ 525\ 590 \\ -2.000\ 002\ 477\ 210\ 539\ 7 - i\ 6.633\ 254\ 636\ 525\ 291 \end{array} \right.$$

$$\sum_{i=1}^{16} \Delta_i = -(8+i)10^{-16}$$

et on en déduit les racines suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lll} -0.500\ 000\ \underline{13} & \pm i\ 1.322\ 875\ 8 & \text{de multiplicité } 4 \\ -0.499\ 999\ \underline{1} & + i\ 1.658\ 31\bar{3} & - \quad 4 \\ -0.500\ 000\ \underline{6} & - i\ 1.658\ 313 & - \quad 4 \end{array} \right.$$

Nous pouvons noter que dans cet exemple aussi nous doublons le nombre de décimales exactes, ce qui est normal l'erreur étant en (Δ^2)

9.1.4. Polynôme $P_{22} z^6 + 3z^4 + 3z^2 + 1$

dont les racines sont $i, i, i, -i, -i, -i$.

$\varepsilon = 1.10^{-12}$ Les valeurs initiales sont alternativement $0.5i, -0.5i$

Résultats comparatifs

<u>Newton-Simple</u>	<u>Ité.</u>	<u>Newton-P</u>	<u>Mult.</u>	<u>Ité.</u>
0. + i 0.999 959 325 ...	23	0. + i 1.000 000 397 423 613	<u>3</u>	8
0. - i 0.999 945 555 ...	23	0. - i 1.000 000 237 933 366	<u>3</u>	8
0. + i 1.000 011 296 ...	15	0. + i 0.999 999 796 599 322 6	2	8
0. - i 1.000 030 152 ...	15	0. - i 0.999 999 883 662 329 9	2	8
0. + i 1.000 029 376 ...	6	0. + i 0.999 999 805 976 985 0	1	6
0. - i 1.000 024 428 ...	0	0. + i 0.999 999 878 404 235 0	1	0
	<u>83</u>			<u>38</u>

Par Newton-P, nous obtenons 2 racines de multiplicité 3 .

De plus, nous avons $\sum_{i=1}^6 \Delta_i = 0$

$$\frac{z_1^{+z_3+z_5}}{3} = 0.999\ 999\ 999\ 999\ 97\ i \text{ de multiplicité } 3$$

$$\frac{z_2^{+z_4+z_6}}{3} = 0.999\ 999\ 999\ 999\ 97\ i \text{ de multiplicité } 3$$

REMARQUE :

Les résultats des autres essais effectués sont renvoyés en annexes.

9.1.5. Conclusions

La méthode de Newton-P présente de nombreux avantages par rapport à Newton-simple :

- elle donne en principe l'ordre de multiplicité,
- il y a généralement gain de précision et d'itérations,
- elle permet d'appliquer les résultats de I.2., ce qui accroît considérablement le nombre de décimales exactes dans le cas de racines multiples. La précision devient alors aussi bonne que pour une racine simple,
- elle est identique à celle de Newton simple lorsque les racines sont toutes simples et bien séparées.

9.2. Résultats numériques - Cas de racines voisines

a) $(x-1)^2(x-1.1)^2 = 0$, valeur initiale 0 $\epsilon = 1.10^{-15}$

En 15 itérations, l'ordre de multiplicité 2 a été trouvé. Trois itérations supplémentaires, à l'aide de la formule du second ordre (pour la racine 1) $x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n)}$ ont permis de passer de $|f(x)| \approx 1.10^{-8}$ à $|f(x)| \approx 2.10^{-16}$.

Résultats :	1.000 000 072 161 8	Multiplicité	2
	0.999 999 927 838 1		
	1.099 999 926 909 9		1
	1.100 000 073 090 0		1

REMARQUE IMPORTANTE :

La perte de précision inhérente à la division du polynôme par la racine trouvée peut entraîner une modification de l'ordre de multiplicité des racines restantes. (Des racines multiples peuvent devenir, de ce fait, simples). Avec la valeur initiale = 1.4 , nous aurions trouvé 1.1, avec multiplicité 2.

b) $(x-0.88)(x-0.89)(x-0.90)(x-0.91) = 0$ $\epsilon = 1.10^{-12}$ V.I. = 0
(cf. graphique 1.1)

En 19 itérations, on a obtenu $p = 1$,

Résultats :	0.879 999 910 03
	0.890 000 269 5
	0.899 999 730 4
	0.910 000 089 83

c) $(x-1)^2(x-1.01)(x-1.02)$ $\epsilon = 1.10^{-14}$ V.I. = 0

Résultats :	1.000 000 100 39	de multiplicité 2 en 22 itérations
	0.999 999 899 60	
	1.010 000 000 015	de multiplicité 1
	1.019 999 999 991	

d) $(x-1)^2(x-1.001)(x-1.002)$ $\epsilon = 1.10^{-13}$ V.I. = 0

La précision a été atteinte avant que p ait pu être déterminé.

Nous avons pris alors comme ordre de multiplicité probable 3.

Sur le graphique 1, nous nous trouvons dans la région II, qui fait passer de la multiplicité 4 à 2.

Avec $\epsilon = 1.10^{-15}$, nous avons trouvé l'ordre exacte 2 à la 29ème itération.

Résultats comparatifs

$\epsilon = 1.10^{-13}$		$\epsilon = 1.10^{-15}$	
0.999 829 977	27 itérations	0.999 996 69	29 itérations
1.000 232		1.000 003 32	
1.000 919		1.000 999 97	
1.002 017		1.002 000 005	

L'amélioration très sensible des résultats est due à l'application (une fois) de la formule du second ordre

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2 f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

e) $(x-1)^2(x-1.000\ 1)(x-1.000\ 2) = 0$ $\epsilon = 1.10^{-15}$ V.I. = 0

A la 29ème itération, la précision a été atteinte sans que l'ordre de multiplicité réel soit trouvé. Les racines n'ont pu être séparées.

Leur "coefficient de séparation" $\frac{d}{|z|} = \frac{1.10^{-4}}{1} = 1.10^{-4}$

Résultats 1.000 061 4
 1.000 061 4
 1.000 061 4
 1.000 115

f) Nous avons fait les mêmes essais en multipliant les racines par 10 et ensuite par 100.

$(x-10)^2(x-10;1)(x-10.2) = 0$ les racines ont été séparées
 $(x-10)^2(x.10.01)(x-10.02) = 0$ " " " "
 $(x-10)^2(x-10.001)(x-10.002) = 0$ " n'ont pas pu être séparées

Coefficient de séparation $\frac{1.10^{-3}}{10} = 1.10^{-4}$

$(x-100)^2(x-101)(x-102)$	Racines séparées
$(x-100)^2(x-100.1)(x-100.2)$	- -
$(x-100)^2(x-100.01)(x-100.02)$	- non séparées
Coefficient de séparation	$\frac{1 \cdot 10^{-2}}{100} = 1 \cdot 10^{-4}$

Nous vérifions, ainsi, la remarque faite à la fin de 8.1.2.

La multiplication des racines par un coefficient n'améliore pas la possibilité de séparation de ces racines.

REMARQUES :

Les autres essais effectués sont regroupés en annexe .

9.3. Résultats par HALLEY et NEWTON améliorée

Comme nous l'avons vu précédemment, ce sont des méthodes du 3ème ordre dans le cas de racines simples.

Nous retrouvons ce résultat sur les essais effectués.

Dès que l'on est suffisamment proche d'une racine simple, le nombre de décimales exactes triple à chaque itération.

Ces 2 méthodes sont plus rapidement convergentes que la méthode de Newton, mais nécessitent le calcul supplémentaire de la dérivée seconde. Il y a donc moins d'itérations, mais les calculs sont plus longs.

Pour des racines voisines (cf. le polynôme P_{34}) la convergence est nettement affaiblie et devient linéaire dans le cas de racines multiples.

Leur indice d'efficacité est le même pour les deux $= 3^{\frac{1}{3}} \approx 1.44$.

Les résultats numériques sont renvoyés dans les tableaux récapitulatifs finals.

En conclusion ces deux méthodes peuvent être intéressantes dans le seul cas où les racines sont simples et bien séparées.

- B -

Méthodes du type LAGUERRE

1 - Introduction

C'est aussi une méthode à un point d'appui faisant intervenir f , f' , f'' .
Dans $\mathbb{R}$, elle s'écrit :

$$L(x) = x_{k+1} = x_k - \frac{nf(x_k)}{f'(x_k) \pm \sqrt{(n-1)[(n-1)f'(x_k)^2 - nf(x_k)f''(x_k)]}}$$

où $f(x)$ est un polynôme de degré n .

Elle a la propriété importante de converger quelque soit x_0 le point de départ ; sa convergence est cubique dans le cas de racines simples, mais devient linéaire en présence de racines multiples.

Comme pour Newton, nous nous sommes spécialement intéressés à sa généralisation aux cas de racines multiples.

Les principaux résultats, avec cependant quelques restrictions, seront encore valables en complexe.

Cette méthode généralisée sera un outil extrêmement efficace par sa rapidité de convergence dans la plupart des cas.

2 - Rappel de certaines propriétés importantes de la méthode de LAGUERRE.

Nous nous plaçons dans $\mathbb{R}$.

a) $\forall x_0$ réel, les itérations successives convergent vers une racine du polynôme étudié (cf. LAGUERRE [28]).

b) Chaque signe devant le radical conduit à une suite convergente :

$$\begin{array}{lcl} x_0, x_1, x_2, \dots & \longrightarrow & X \\ x_0, x'_1, x'_2, \dots & \longrightarrow & X' \end{array}$$

D'où les deux théorèmes suivants (OSTROWSKI [41]) :

. Soit $f(x)$ un polynôme de degré n et sans racine complexe,

si x_0 se situe entre deux racines consécutives X et X'

et

si $f'(x_0) \neq 0$,

alors,

les deux suites restent entre X et X' et l'une converge vers X pendant que l'autre converge vers X' . La convergence est monotone.

. Sous les mêmes hypothèses que précédemment et si x_0 se situe à l'extérieur de l'intervalle contenant toutes les racines de $f(x)$, alors les deux suites convergent, l'une vers la plus petite, l'autre vers la plus grande racine de $f(x)$. La convergence est monotone à partir d'un certain rang.

c) Pour une racine simple, la convergence est cubique :

(RALSTON [44] ...)

$$\text{En effet, soit } \varphi(x) = x - \frac{nf(x)}{f'(x) \pm \sqrt{H(x)}}$$

$$\varphi'(\alpha) = 1 - \frac{nf'(\alpha)}{f'(\alpha) \pm (n-1)|f'(\alpha)|}$$

$$\varphi''(\alpha) = - \frac{nf''(\alpha)}{f'(\alpha) \pm (n-1)|f'(\alpha)|} * \left\{ 1 - \frac{2f'(\alpha)}{f'(\alpha) \pm (n-1)|f'(\alpha)|} \left(1 \pm \frac{n-2}{2} \frac{f'(\alpha)}{|f'(\alpha)|} \right) \right\}$$

Si $f'(\alpha) > 0$ et si nous prenons le signe + devant le radical
ou si $f'(\alpha) < 0$ et si nous prenons le signe - devant le radical,
alors,

$\varphi'(\alpha)$ et $\varphi''(\alpha) = 0 \implies$ convergence est cubique dans ces cas là.

Nous pouvons noter que cela correspond à chaque fois à la valeur maximale en valeur absolue du dénominateur, donc au cas où $|x_{k+1} - x_k|$ est minimale.

Pour une racine multiple la convergence est strictement linéaire (cf. OSTROWSKI [41], VAN DER CORPUT [52]).

d) Autre propriété intéressante énoncée par RAY [45]:

$L(x)$ est généralement voisine d'une racine quand $|x_0|$ est grand (x_0 : valeur de départ).

En effet, $H(x) = [(n-1)^2 a_1^2 - 2n(n-1) a_2] x^{2n-4} + \dots$

D'où

$$L(x) \approx x - \frac{nx^n + n a_1 x^{n-1}}{nx^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-1} \pm \sqrt{H(x)}}$$

D'où, en réduisant au même dénominateur :

$$\begin{aligned} L(x) &\approx \pm \frac{\sqrt{(n-1)^2 a_1^2 - 2n(n-1) a_2} x^{n-1} - a_1}{n x^{n-1}} \\ &\approx \pm \frac{\sqrt{(n-1)^2 a_1^2 - 2n(n-1) a_2} - a_1}{n} \end{aligned}$$

résultat indépendant de x .

Nous avons vérifié cette propriété lors des essais.

Exemple : Soit le polynôme $(x+1)^3(x+4)$

Soit $x_0 = 1.10^6$ valeur initiale.

Nous avons trouvé $x_1 = 0.5$ et $x_7 = -1$.

REMARQUE :

Cette propriété n'est pas vraie pour la méthode de Newton.

De la même façon, nous obtiendrions $L_1'(x) = \frac{(n-1)}{n} x$, c'est ce qui explique l'importance du point de départ pour ce type d'algorithme.

3 - Etude de la méthode dans le cas de racines réelles multiples

3.1. Formule de LAGUERRE généralisée (cf. DEKKER [7]).

Considérons la fonction d'interpolation

$$f^*(x) = c(x-a)^p(x-b)^q \quad \text{où } p \text{ et } q \text{ sont des paramètres.}$$

Les trois inconnues a , b et c sont telles que f^* et ses dérivées $f^{*'} et $f^{*''}$ sont égales à celles de la fonction $f(x)$ (polynôme initial de degré n).$

$$\text{Posons } s_1 = \frac{f'}{f} \quad s_2 = -\frac{ds_1}{dx} = s_1^2 - \frac{f''(x)}{f(x)}$$

$$\text{Mais } f' = f^{*'} = c(x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}(p(x-b) + q(x-a))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_1 = \frac{p}{x-a} + \frac{q}{x-b} \\ s_2 = \frac{p}{(x-a)^2} + \frac{q}{(x-b)^2} \end{cases}$$

D'où en éliminant b et en posant $X = x-a$, on trouve une équation du second degré en X dont les solutions sont :

$$X = \frac{ps_1 \pm \sqrt{p^2 s_1^2 - (p^2 + pq)(s_1^2 - qs_2)}}{s_1^2 - qs_2}$$

$$\text{ou } X = \frac{p s_0}{ps_1 \pm \sqrt{pq(s_0 s_2 - s_1^2)}} \quad \text{avec } s_0 = p+q ;$$

c'est-à-dire : $L(x)$ étant une approximation de a ,

$$L(x) = x - \frac{s_0}{s_1 \pm \sqrt{\frac{q}{p}(s_0 s_2 - s_1^2)}}$$

C'est la formule proposée par DEKKER [7] et BODEWIG [5] .

REMARQUE :

Si nous faisons $p = 1$ (cas d'une racine simple) on a alors $q = (n-1)$ et la formule ci-dessus se réduit à la formule de LAGUERRE simple.

3.2. Convergence de la méthode généralisée

Soit un polynôme $f(x)$ de degré n ayant une racine multiple d'ordre m .

$$f(x) = (x-\alpha)^m Q_{n-m}(x)$$

$$f'(x) = m(x-\alpha)^{m-1} Q_{n-m}(x) + (x-\alpha)^m Q'(x)$$

Posons $X = x - \alpha$.

On a $s_1 = \frac{f'}{f} = \frac{m}{X} + \sigma$ σ étant finie au voisinage de la racine.

$$\implies s_2 = -\frac{ds_1}{dx} = \frac{m}{X^2}.$$

$$D'où \quad L(X) = X - \frac{(p+q)}{\frac{m}{X} + \sigma \pm \sqrt{\frac{q}{p} \left((p+q) \frac{m}{X^2} - \frac{m^2}{X^2} - \frac{2m\sigma}{X} - \sigma^2 \right)}}$$

La convergence sera d'ordre k si nous pouvons écrire :

$$L(X) = O(X^k) \quad \text{sachant que } X = x - \alpha.$$

. Supposons $X > 0$

$$(1) \implies L(X) = X - \frac{X(p+q)}{D}$$

$$\text{avec } D = m + \sigma X \pm \sqrt{\frac{q}{p} \left((p+q)m - m^2 - 2m\sigma X \right) + O(X^2)}$$

puisque au voisinage de la racine $\sigma^2 X^2 = O(X^2)$.

Dans (1), nous faisons disparaître les termes en X en mettant

$$-X \frac{(p+q)}{D} \quad \text{sous la forme } -X \left(\frac{1}{1 + O(X^k)} \right).$$

D s'écrit alors :

$$D = (p+q) + \mathcal{O}(X^k)$$

Nous pouvons éliminer les termes en σX en écrivant le radical sous la forme :

$$r - \sigma X + \mathcal{O}(X^k) \quad \text{avec } \underline{r > 0}$$

à condition que le signe + soit pris devant celui-ci.

La quantité sous le radical s'écrit donc :

$$r^2 - 2r\sigma X + \mathcal{O}(X^2)$$

puisque le terme en $\sigma^2 X^2$ ne peut être éliminé.

En identifiant, nous obtenons les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} r^2 = \frac{q}{p} ((p+q)m - m^2) \\ r = \frac{qm}{p} \\ p+q = m+r \end{array} \right.$$

Ces trois relations sont satisfaites en prenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} p = m \\ q = r \end{array} \right.$$

En remplaçant, nous avons enfin :

$$L(X) = X - \frac{(p+q)X}{(p+q) + \mathcal{O}(X^2)} = X - X \left(\frac{1}{1 + \frac{\mathcal{O}(X^2)}{(p+q)}} \right) = \mathcal{O}(X^3)$$

Donc si $X > 0$, $p = m$, $q > 0$ et en prenant le signe + devant le radical, la convergence est cubique.

De même, si $X < 0$, $p = m$, $q > 0$ et avec le signe -, on aurait le même résultat.

Comme précédemment, les deux cas $X > 0$ signe + et $X < 0$ signe -, correspondent au $\sup (|\text{Dénominateur}|)$.

D'où le théorème de convergence locale :

La suite $x, L(x), L(L(x)) \dots$ converge cubiquement dans un voisinage d'une racine α de multiplicité m , si :

- . $p = m$
- . q constante > 0

et si le module du dénominateur est maximal.

REMARQUES :

. Peut-on avoir un ordre de convergence supérieur à 3 ?

Il faudrait pour cela que le dénominateur puisse se mettre sous la forme $(m+q) + O(X^3)$, ce qui est impossible du fait de la présence de $O^2 X^2$ qui ne peut être modifié.

. Nous pouvons vérifier le résultat proposé par DEKKER [7] . Il faut prendre p très voisin de m pour assurer une convergence cubique.

Si $p = m + O(x-\alpha)^2$, le raisonnement précédent est toujours valable.

Par contre, si $p = m + O(x-\alpha)$ seulement, alors ce dernier infiniment petit quand $x \rightarrow \infty$ est prépondérant par rapport à $O(x-\alpha)^2$ et $D = (m+q) + O(x-\alpha)$, ce qui conduit à une convergence quadratique.

Il est donc important de trouver l'ordre de multiplicité exact.

En complexe, nous pourrions définir l'opérateur de LAGUERRE par

$$L(z) = z - \frac{s_0}{s_1 + \sqrt{\frac{q}{p}(s_0 s_2 - s_1^2)}}$$

Les résultats précédents sont encore valables (cf. DEKKER [7]).

RAY [45] montre, cependant, qu'il existe quelques classes de polynômes pour lesquelles il est difficile de trouver une valeur initiale assurant la convergence vers une racine.

3.3. Choix de p et q

p sera, évidemment, pris égal à l'ordre de multiplicité m de la racine. Ce dernier sera calculé exactement de la même façon que pour Newton-P.

Pour q, DEKKER [7] suggère de prendre $q = n-p$ ou $\min(n-p, p)$.

Les essais ont montré que cela n'avait que peu d'importance ; dans les programmes faits nous avons pris $q = n-p$.

REMARQUE :

Comme pour NEWTON-P, cette méthode fait intervenir l'ordre de multiplicité calculé de la racine. Nous l'appellerons donc, pour la suite, la méthode de LAGUERRE-P.

4 - Analyse des programmes faits

Nous avons fait trois programmes :

- . en réel, avec la formule de LAGUERRE classique,
- . en réel, avec la formule de LAGUERRE-P
- . en complexe, avec la formule de LAGUERRE-P

Ces programmes sont en tous points semblables à ceux de Newton et Newton-P. Les tests sont les mêmes.

Les premières itérations se feront avec $p = 1$, $q = n-1$ (ce qui résoud le cas des racines simples) et dès que l'ordre de multiplicité aura été déterminé, nous utiliserons la formule généralisée, LAGUERRE-P.

5 - Résultats numériques

5.1. Comparaison des deux méthodes : LAGUERRE et LAGUERRE-P

Considérons le polynôme $P_{23} : (x-1)^4(x-2)^3(x-3)^2(x-4) = 0$.
 $\epsilon = 1.10^{-12}$ $x_0 = 0$.

Calcul de la lère racine :

LAGUERRE	itérations	LAGUERRE-P	Multiplicité
0.645 034 048 435 922 6	1	idem	1
0.935 160 981 222 866 5	3ème	-	1
0.993 733 918 266 033 1	7ème	-	1
0.997 091 841 711 044 9	8ème	0.999 999 211 057 178 8	4
-----		Arrêt	
0.999 470 974 948 247 5	11ème		

Arrêt

Dès que l'ordre de multiplicité a pu être déterminé, la convergence est devenue cubique, d'où le nombre de décimales exactes est multiplié par 3.

De ce fait, comme pour Newton-P, le nombre d'itérations est plus faible, mais plus encore la précision est nettement meilleure.

RESULTATS COMPLETS

LAGUERRE-Simple	LAGUERRE-P
0.9994709749482425D+00	0.9999992110571788D+00
0.1000865251396368D+01	0.9999992110571788D+00
0.1000435757946538D+01	0.9999992110571788D+00
0.9992319334600247D+00	0.1000002366844617D+01
0.1982477238278503D+01	0.1999999161943475D+01
0.1995584123054516D+01	0.1999999161943475D+01
0.2022987194621988D+01	0.2000001676052496D+01
0.2970680589900121D+01	0.3000000024895016D+01
0.3028474152285570D+01	0.2999999975183522D+01
0.3999792784108122D+01	0.3999999999965860D+01

en 55 itérations

en 31 itérations

REMARQUES :

a) Puisque nous connaissons l'ordre de multiplicité, nous pouvons appliquer les résultats du chapitre I.2..

Un programme a été fait en conséquence, ce qui améliore encore considérablement les résultats précédents. Nous avons alors trouvé :

x_1	= 1.000 000 000 004 037	de multiplicité	4
x_2	= 1.999 999 999 979 815	-	3
x_3	= 3.000 000 000 039 269	-	2
x_4	= 3.999 999 999 965 860	-	1

Comme il était à prévoir, nous doublons presque le nombre de décimales exactes (et $\Sigma \Delta_i = 8.10^{-16}$).

b) Avec $\epsilon = 1.10^{-15}$ il a fallu à Laguerre-P 64 itérations pour obtenir des résultats très légèrement supérieurs aux précédents. Nous retrouvons là, le même phénomène rencontré dans les autres méthodes.

c) Le tableau récapitulatif nous permet de comparer Laguerre-P et Newton-P. Pour une même précision désirée, Laguerre-P donne des résultats sensiblement meilleurs, en nettement moins d'itérations (31/97).

d) Le cas des racines voisines est traité comme dans Newton. Il faut cependant noter que la rapidité de convergence ne permet pas toujours de déterminer l'ordre de multiplicité exact. C'est ainsi qu'il est plus difficile de séparer des racines voisines qu'avec Newton-P.

Exemple : Soit le polynôme $(x-1)^2(x-1.001)(x-1.002)$
 $\epsilon = 1.10^{-15}$ valeur initiale 0.

En 29 itérations avec Newton-P, nous pouvons déterminer l'ordre de multiplicité exact 2. $x = 0.999\ 996 \dots$

Par contre, avec Laguerre-P, en 5 itérations nous avons trouvé un résultat comparable $x = 1.000\ 008\dots$, mais sans déterminer l'ordre de multiplicité.

Des essais supplémentaires ont confirmé cette remarque. Le coefficient de "séparation" défini dans (III.A.8.2.2.) est, ici, de l'ordre de 1.10^{-3} .

donc supérieur à celui de Newton-P, ceci est paradoxalement dû à la plus grande rapidité de convergence même dans le cas de racines multiples de la méthode de Laguerre.

5.2. Autres résultats

Les résultats pour les autres polynômes testés se trouvent dans le tableau final récapitulatif. Nous citerons cependant, ici, le cas du polynôme P_{35} :

$$(z^2+z+2)^4(z^2+z+3)^4 = 0$$

Les résultats sont particulièrement intéressants.

Contrairement à Newton, nous pouvons choisir une valeur initiale réelle quel que soit le polynôme et ses racines. De plus, la convergence à partir d'un certain rang étant monotone, nous sommes assurés, si la valeur initiale est zéro, d'obtenir les racines par modules croissants.

C'est ce que confirment les résultats suivants :

$$\epsilon = 1.10^{-14} \text{ . Valeur initiale} = 0 \text{ .}$$

En 121 itérations, nous avons obtenu :

```
-0.4999913784119047D+00-0.1322880764772771D+01
-0.4999913784119047D+00 0.1322880764772771D+01
-0.4999913784119047D+00-0.1322880764772771D+01
-0.5000030440722165D+00 0.1322874375720873D+01
-0.5000013030144312D+00-0.1322858640741719D+01
-0.4999978424182111D+00 0.1322866839650691D+01
-0.5000077352087664D+00 0.1322880641890251D+01
-0.5000159401471656D+00-0.1322882451752039D+01
-0.4999993561859556D+00 0.1658310954062328D+01
-0.5000000220638782D+00-0.1658312197118088D+01
-0.4999995397250448D+00-0.1658312674051171D+01
-0.5000001463620055D+00 0.1658312735814622D+01
-0.5000002080348587D+00-0.1658312373435283D+01
-0.5000002396890683D+00 0.1658312940700644D+01
-0.5000002301820150D+00-0.1658312336182346D+01
-0.5000002576606677D+00 0.1658312950214007D+01
```


REMARQUE :

En appliquant les résultats du chapitre I.2. , nous trouvons :

$$\begin{array}{llll} z & = & -0.499\ 999\ 999\ 99\overline{6} & - \ i\ 1.322\ 875\ 655\ 50\overline{9} \quad \text{multiplicité } 4 \\ z & = & -0.500\ 000\ 000\ 02\overline{2} & + \ i\ 1.322\ 875\ 655\ 50\overline{0} \quad - \quad 4 \\ z & = & -0.499\ 999\ 999\ 97\overline{7} & + \ i\ 1.658\ 312\ 395\ 19\overline{9} \quad - \quad 4 \\ z & = & -0.500\ 000\ 000\ 00\overline{1} & - \ i\ 1.658\ 312\ 395\ 19\overline{9} \quad - \quad 4 \end{array}$$

Nous avons ainsi au moins 10 décimales justes par racine pour ce polynôme particulièrement mal conditionné.

6 - Conclusion

Les méthodes de Laguerre et Laguerre-P sont, sans aucun doute, deux des meilleures méthodes de résolution d'équations polynomiales.

Par rapport à Newton et Newton-P, elles ont l'avantage de converger rapidement quel que soit le point de départ et son éloignement d'une racine.

Laguerre-P permet de résoudre aisément le cas des racines multiples sans calcul supplémentaire par rapport à Laguerre simple ($f''(x)$ intervient dans les deux).

En outre, connaissant l'ordre de multiplicité et la convergence étant monotone, nous pouvons appliquer les résultats du chapitre I.2. , ce qui nous assure un nombre considérable de décimales justes.

Ce sont deux méthodes que l'on peut fortement recommander dans tous les cas, sauf peut être si le degré est trop élevé auquel cas la méthode de Muller est peut être plus rapide. Notons enfin que l'indice d'efficacité pour Laguerre-P quelle que soit la multiplicité des racines, est égale à $3^{1/3} \approx 1.44$.

Chapitre IV

-

M E T H O D E S A P L U S I E U R S

P O I N T S D' A P P U I

- A -

Méthode de MULLER

1 - Introduction

C'est une méthode qui est basée sur l'interpolation.

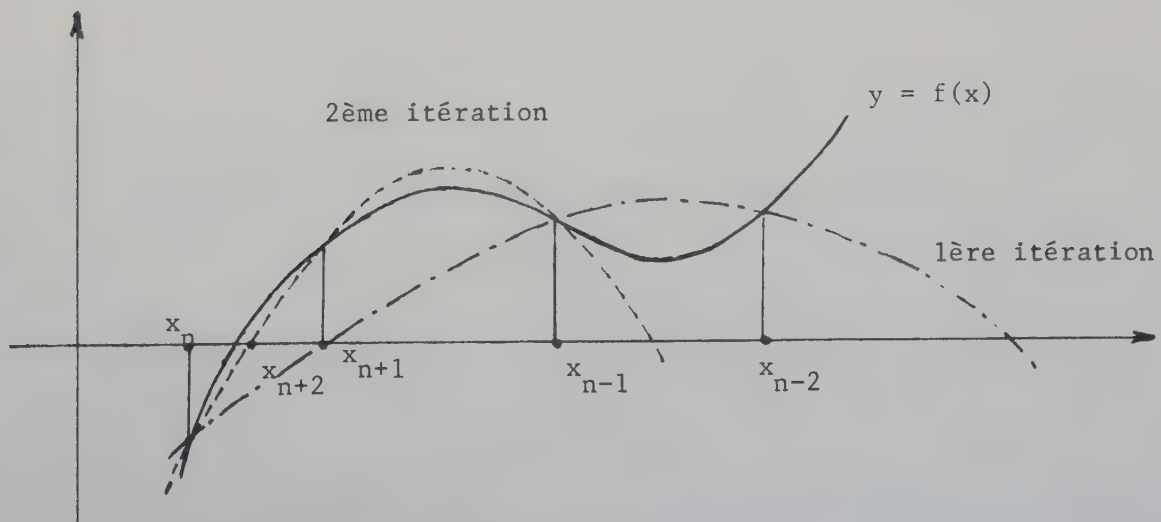
Si nous considérons n points définis par $(x_n, f(x_n), \dots, x_1, f(x_1))$, un polynôme d'interpolation passant par ces n points coupera l'axe au moins en un point x_{n+1} .

Pour obtenir le polynôme d'interpolation, il suffit d'utiliser la formule d'interpolation de Lagrange.

La méthode de Muller consiste à prendre $n = 2$ (c.à.d. à interpoler par une conique).

En fait, les autres possibilités avec $n > 2$ conduiraient à de nombreux calculs à chaque itération et plus encore, pour n assez grand, les polynômes de Lagrange peuvent donner des résultats assez mauvais.

Pour $n = 2$, nous pouvons donner une interprétation géométrique simple :



Nous constatons graphiquement qu'il faut retenir le point le plus proche de x_n . Le processus se poursuit jusqu'à ce que la précision souhaitée soit atteinte.

La méthode ne faisant appel qu'à des calculs de fonctions (aucune dérivée) est donc particulièrement recommandée pour des polynômes de degré élevé.

2 - Etude de la méthode de MULLER

2.1. Formule due à MULLER [38]

Soit la formule d'interpolation de Lagrange à 3 points .

On peut l'écrire sous la forme :

$$L_i[f(z)] = a_0 z^2 + a_1 z + a_2$$

Elle doit passer par les 3 points z_{i-2} , z_{i-1} , z_i .

On a alors :

$$L_i[f(z)] = f(z_{i-2}) \frac{(z-z_{i-1})(z-z_i)}{(z_{i-2}-z_{i-1})(z_{i-2}-z_i)} + f(z_{i-1}) \frac{(z-z_{i-2})(z-z_i)}{(z_{i-1}-z_{i-2})(z_{i-1}-z_i)} + f(z_i) \frac{(z-z_{i-2})(z-z_{i-1})}{(z_i-z_{i-2})(z_i-z_{i-1})} .$$

Pour simplifier les calculs, nous posons comme nouvelle variable :

$$\lambda = \frac{h}{h_i} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} h = z - z_i \\ h_i = z_i - z_{i-1} \end{cases}$$

Dans les calculs apparaissent d'autres éléments :

$$z_{i-1} - z_{i-2} = h_{i-1}$$

$$\frac{z_i - z_{i-1}}{z_{i-1} - z_{i-2}} = \frac{h_i}{h_{i-1}} = \lambda_i \quad \text{et enfin} \quad \frac{h_{i-1} + h_i}{h_{i-1}} = 1 + \lambda_i = \delta_i$$

Le premier élément de $L_i[f(z)]$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 & f(z_{i-2}) \frac{((z-z_i) + (z_i-z_{i-1}))(z-z_1)}{(z_{i-2}-z_{i-1})(z_{i-2}-z_{i-1}+z_{i-1}-z_i)} \\
 &= f(z_{i-2}) \times \frac{(h+h_i)h}{h_{i-1}(h_i+h_{i-1})} = f(z_{i-2}) \times \frac{(h+h_i)h}{h_{i-1}^2 \times \delta_i} \\
 &= f(z_{i-2}) \left(\frac{h^2}{h_{i-1}^2 \delta_i} + \frac{hh_i}{h_{i-1}^2 \delta_i} \right)
 \end{aligned}$$

Pour faire apparaître λ , on introduit des h_i aux dénominateurs, d'où :

$$= f(z_{i-2}) \frac{1}{\delta_i} (\lambda^2 \lambda_i^2 + \lambda \lambda_i^2)$$

En opérant de la même façon pour les deux autres éléments de $L_i[f(z)]$, nous obtenons un polynôme du second degré en λ qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
 L_i[f(z)] &= \frac{\lambda^2}{\delta_i} [f(z_{i-2})\lambda_i^2 - f(z_{i-1})\lambda_i\delta_i + f(z_i)\lambda_i] \\
 &+ \frac{\lambda}{\delta_i} [f(z_{i-2})\lambda_i^2 - f(z_{i-1})\delta_i^2 + f(z_i)(\lambda_i+\delta_i)] + f(z_i)
 \end{aligned}$$

Nous cherchons à annuler $L_i[f(z)]$, donc à résoudre l'équation en λ .

Une des deux valeurs ainsi obtenues, donnera la valeur approchée z_{i+1} par $\lambda = \lambda_{i+1} = \frac{z_{i+1}-z_i}{z_i-z_{i-1}}$.

Comme pour la méthode de Laguerre, nous multiplions haut et bas par $-b \pm \sqrt{b^2-4ac}$, d'où :

$$\lambda_{i+1} = \frac{-2f(z_i)\delta_i}{g_i \pm \{g_i^2 - 4f(z_i)\delta_i\lambda_i[f(z_{i-2})\lambda_i - f(z_{i-1})\delta_i + f(z_i)]\}^{1/2}}$$

$$\text{où } g_i = f(z_{i-2})\lambda_i^2 - f(z_{i-1})\delta_i^2 + f(z_i)(\lambda_i + \delta_i)$$

$$\text{Avec } \lambda_{i+1} = \frac{z_{i+1} - z_i}{z_i - z_{i-1}}$$

$$\implies z_{i+1} = z_i + \lambda_{i+1} (z_i - z_{i-1})$$

$$\boxed{z_{i+1} = z_i + \lambda_{i+1} h_i}$$

Le signe sera choisi de façon à ce que le dénominateur soit le plus grand, afin d'être le plus près possible de z_i et non de l'autre côté (cf. le graphique dans 1).

2.2. Convergence locale de la méthode

Nous pouvons utiliser la même méthode qu'au chapitre IV.C.

Le polynôme d'interpolation est ici de degré 2 ; il peut donc s'écrire :

$$L[f(z)] = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$$

Il doit passer par les trois points z_{n-2} , z_{n-1} , z_n . Nous cherchons à annuler $L[f(z)]$, la valeur z ainsi obtenue sera une approximation de la racine cherchée α , nous l'appellerons z_{n+1} .

Pour simplifier, nous considérons que la racine α cherchée est la nouvelle origine.

$$\implies \alpha - z_n = \epsilon_n = -z_n$$

Nous avons alors la série de relations suivante qui nous permettra d'écrire ϵ_{n+1} en fonction de ϵ_n , ϵ_{n-1} , ϵ_{n-2} .

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 - a_1 \epsilon_{n+1} + a_2 \epsilon_{n+1}^2 = 0 \\ a_0 - a_1 \epsilon_n + a_2 \epsilon_n^2 = f(-\epsilon_n) \\ a_0 - a_1 \epsilon_{n-1} + a_2 \epsilon_{n-1}^2 = f(-\epsilon_{n-1}) \\ a_0 - a_1 \epsilon_{n-2} + a_2 \epsilon_{n-2}^2 = f(-\epsilon_{n-2}) \end{array} \right.$$

On a un système de quatre équations à trois inconnues ,
donc,

$$\begin{vmatrix} 1 & -\varepsilon_{n+1} & \varepsilon_{n+1}^2 & 0 \\ 1 & -\varepsilon_n & \varepsilon_n^2 & -f(-\varepsilon_n) \\ 1 & -\varepsilon_{n-1} & \varepsilon_{n-1}^2 & -f(-\varepsilon_{n-1}) \\ 1 & -\varepsilon_{n-2} & \varepsilon_{n-2}^2 & -f(-\varepsilon_{n-2}) \end{vmatrix} = 0$$

Développons en négligeant les termes en ε_{n+1}^2

$$\Rightarrow \varepsilon_{n+1} = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon_n & \varepsilon_n^2 & f(-\varepsilon_n) \\ \varepsilon_{n-1} & \varepsilon_{n-1}^2 & f(-\varepsilon_{n-1}) \\ \varepsilon_{n-2} & \varepsilon_{n-2}^2 & f(-\varepsilon_{n-2}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_n^2 & f(-\varepsilon_n) \\ 1 & \varepsilon_{n-1}^2 & f(-\varepsilon_{n-1}) \\ 1 & \varepsilon_{n-2}^2 & f(-\varepsilon_{n-2}) \end{vmatrix}}$$

Il suffit alors de développer en série de Taylor :

$$f(-\varepsilon_k) = (-\varepsilon_k)f'(\alpha) + \dots + \frac{(-1)^p \varepsilon_k^p f^{(p)}(\alpha)}{p!} + \dots$$

Au numérateur, les deux premiers termes du développement sont proportionnels à ceux des deux premières colonnes, donc il reste :

$$N \approx \begin{vmatrix} \varepsilon_j & \varepsilon_j^2 & -\varepsilon_j^3 & \frac{f^{(3)}(\alpha)}{3!} \end{vmatrix}_{j=n,n-1,n-2}$$

Le dénominateur s'écrit :

$$D \approx \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_j f'(\alpha) & \varepsilon_j^2 \end{vmatrix}_{j=n,n-1,n-2}$$

$$\implies \left| \begin{array}{l} \epsilon_{n+1} \approx -\epsilon_n \times \epsilon_{n-1} \times \epsilon_{n-2} \times \frac{f^{(3)}(\alpha)}{6f'(\alpha)} \end{array} \right.$$

REMARQUE :

D'autres démonstrations ont été données par TRAUB [50], OSTROWSKI [41].

Plus généralement, on pourrait démontrer de la même manière que, pour i points d'interpolation,

$$\epsilon_{n+1} = -\epsilon_n \epsilon_{n-1} \epsilon_{n-2} \cdots \epsilon_{n-i} \frac{f^{(i+1)}(\theta)}{(i+1)!f'(\theta)} \quad \theta \in]x_{n+1}, \alpha[$$

(voir KORGANOFF [26] ; TRAUB [50]).

On suppose évidemment que la dérivée $i^{\text{ème}}$ du polynôme ne s'annule pas dans l'intervalle $]x_{n+1}, \alpha[$.

Pour la méthode de Muller, nous en déduisons donc que l'ordre de convergence est donné par la racine de plus grand module de $t^3 = t^2 + t + 1$,

$$\text{c'est-à-dire} \quad t_1 = 1.84 \quad .$$

Le cas d'une racine multiple d'ordre p conduirait de la même façon à une relation de la forme :

$$\epsilon_{n+1}^p = k_p \epsilon_n \epsilon_{n-1} \epsilon_{n-2}$$

$$\implies p t^3 = t^2 + t + 1 \quad .$$

La racine prépondérante t_1 diminue lorsque p croît, par exemple pour $p = 2$ l'ordre de convergence décroît à 1.23.

3 - Analyse des programmes réalisés

3.1. Choix des valeurs de départ

Comme pour les autres méthodes, mais plus particulièrement ici, puisque la méthode de "Muller" est principalement utilisée pour des polynômes de haut degré, il est nécessaire d'obtenir les racines de plus petit module en premier.

a) Choix de Muller

Il propose de prendre les points de départ suivants :

$$z_0 = -1, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = 0$$

Au voisinage de 0, il approxime $f(z)$ par :

$$a_{n-2}z^2 + a_{n-1}z + a_n$$

Les valeurs $f(z_0)$, $f(z_1)$, $f(z_2)$ seront donc calculées très aisément à la 1ère itération

$$\begin{cases} f(z_0) = a_{n-2} - a_{n-1} + a_n \\ f(z_1) = a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ f(z_2) = a_n \end{cases}$$

Ce qui donne $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ $h_2 = -1$ et $h_1 = -2$

Le départ est donc rapide et ne demande aucune évaluation de fonctions.

En opérant de cette manière, il peut y avoir divergence pour certains polynômes.

Muller suggère alors de former à chaque itération le rapport $\left| \frac{f(z_{i+1})}{f(z_i)} \right|$. Si cette quantité est > 10 , alors λ_{i+1} est divisé par 2 et avec cette nouvelle valeur on calcule à nouveau h_{i+1} , z_{i+1} , $f(z_{i+1})$.

En fait, en opérant de cette façon, nous avons rencontré certaines difficultés qui nous ont obligé à modifier ce processus.

b) Difficultés rencontrées et modifications apportées

Dans le cas du polynôme du 36ème degré P_{17} , avec les valeurs de départ ci-dessus, dès la 1ère itération l'algorithme diverge.

Nous avons :

$$\begin{cases} f(z_0) \approx -0.1 \cdot 10^4 \\ f(z_1) \approx -0.9 \cdot 10^3 \\ f(z_2) \approx -0.99 \cdot 10^3 \end{cases}$$

$$\implies \lambda_3 \approx -11.9$$

Mais $\left| \frac{f(z_3)}{f(z_2)} \right|$ étant $\gg 10$, on prend $\lambda_3 = \frac{\lambda_3}{2}$

$$\implies \lambda_3 \approx -0.56 \cdot 10^1$$

$$z_3 \approx -0.56 \cdot 10^1$$

A la seconde itération il y a un décalage des indices :

$$\begin{cases} f(z_{i-2}) \approx -0.9 \cdot 10^3 \\ f(z_{i-1}) \approx -0.99 \cdot 10^3 \\ f(z_i) \approx -0.6 \cdot 10^{31} \end{cases}$$

A la troisième itération nous avons :

$$\begin{cases} f(z_{i-2}) \approx -0.99 \cdot 10^3 \\ f(z_{i-1}) \approx -0.6 \cdot 10^{31} \\ f(z_i) \approx -0.38 \cdot 10^4 \end{cases}$$

Le nouveau λ_{i+1} devient alors très petit du fait que seul $f(z_i)$ apparaît au numérateur et $f(z_{i-1})$ au dénominateur

$$\lambda_{i+1} \approx 0.3 \cdot 10^{-26}$$

Le processus s'arrête donc, puisque λ_{i+1} est pratiquement nulle. La valeur obtenue pour la racine est ≈ 1 , ce qui est fort éloigné d'une racine effective.

. La première modification envisagée a été de diminuer λ_{i+1} de moitié jusqu'à ce que $|f(z_{i+1})| < 10 * |f(z_i)|$.

L'exemple précédent a été ainsi résolu ; quatre diminutions de

λ_{i+1} ont été nécessaires et ont conduit en 10 itérations à la racine $0.812... + i 0.061 ...$

Cette modification a été conservée dans les programmes définitifs.

. L'approximation de $f(z)$ au départ par $a_{n-2}z^2 + a_{n-1}z + a_n$ a été abandonnée. Elle perdait une partie de sa signification dès que les coefficients $a_0, ..., a_{n-3}$ étaient grands (cf. polynôme P_{34}).

Dès la 1ère itération, le calcul se fera donc, directement sur le polynôme complet, la modification proposée par Muller étant particulièrement intéressante pour des calculs manuels.

c) Différents choix proposés pour les valeurs de départ

Nous avons procédé de deux manières différentes :

. Dans un premier programme, après l'obtention d'une racine, nous recommençons les itérations avec les mêmes valeurs initiales $(-i, i, 0)$.

. Dans un second programme, le calcul d'une nouvelle racine démarre avec des valeurs initiales voisines de la racine précédemment trouvée.

Au 1er calcul, les valeurs de départ sont $(-i, i, 0)$; si α est racine, nous repartons avec $(\bar{\alpha} - 0.5), (\bar{\alpha} + 0.5), \bar{\alpha}$. Si $\bar{\alpha}$ est aussi racine et n'a pu être obtenue directement sans itération (cf. le test prévu à cet effet en 3.2.), en partant avec $(-i, i, 0)$ il faudra sans doute autant d'itérations pour sa détermination qu'il en a fallu pour obtenir α . Par contre, en prenant des valeurs approchées de $\bar{\alpha}$, le nombre d'itérations est très sensiblement diminué. $\bar{\alpha}$ étant trouvée, les nouvelles valeurs initiales sont $(\bar{\alpha} - 0.5), (\bar{\alpha} + 0.5), \bar{\alpha}$. On peut alors constater l'intérêt d'un tel choix dans le cas de racines multiples ou voisines (cas défavorable pour la convergence de la méthode de Müller).

Notons aussi que pour des racines réelles groupées en "paquets", les valeurs de départ ainsi calculées sont moins arbitraires que celles du 1er programme $(-i, i, 0)$.

De plus, étant donné qu'en principe, d'après les valeurs initiales choisies pour le calcul de la première racine, celle-ci doit être au voisinage de l'origine ou au moins de petit module, le fait d'en prendre la conjuguée comme nouveau point de départ ne détruira pas, à priori, l'ordre "optimal" d'obtention des racines par module croissant.

Les essais effectués ont confirmé ces remarques.

Pour des polynômes, sans particularité apparente, les deux procédés semblent donner des résultats équivalents, les différences sur le nombre d'itérations ou sur la précision n'étant pas significatives. Par contre, pour certains polynômes mal conditionnés, la 2ème solution semble nettement préférable. (cf. essais au 4.).

3.2. Tests de précision et d'arrêt

Le test de précision se fera en début d'itération au cas où z_3 correspondrait à une racine.

Il se décompose en deux :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } |z_i - z_{i-1}| \leq \varepsilon/100 & \text{si } |z_i| \leq 1 \\ \frac{|z_i - z_{i-1}|}{|z_i|} \leq \varepsilon/100 & \text{si } |z_i| > 1 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{ll} \text{b) } |f(z_i)| < \varepsilon & \text{si } |z_i| \leq 1 \\ |g(\tilde{z}_i)| < \varepsilon & \text{si } |z_i| > 1 \quad \text{avec } \tilde{z}_i = \frac{1}{z_i} \quad \text{et} \\ & g \text{ le polynôme réciproque de } f. \end{array}$$

Généralement c'est b) qui fonctionnera avant a) ; comme dans les autres méthodes, il est décomposé en deux, suivant $|z_i|$ par rapport à 1.

Par contre, si la précision est trop forte et qu'elle ne puisse être atteinte, alors le test a) permettra d'arrêter les itérations.

La précision demandée dans ce cas est plus forte ($\varepsilon/100$) ;

a) ne marchant pas, il est nécessaire d'obtenir le maximum de précision sur z_i , afin que $|f(z_i)|$ ou $|g(\tilde{z}_i)|$ soit quand même suffisamment petit.

Une racine α étant trouvée, nous formons le polynôme quotient $f(z)/(z-\alpha)$ et nous testons $\bar{\alpha}$. Le test est identique à b) mais par rapport à $100 * \varepsilon$ au lieu de ε afin de tenir compte des éventuelles erreurs dues à la division.

Mais l'expérience nous a montré souvent que, bien que $\bar{\alpha}$ soit effectivement racine, les erreurs de calcul dues principalement à la division du polynôme de travail par $(z-\alpha)$ font que le test précédent ne fonctionne

pas, malgré la diminution de la précision à $100 * \epsilon$. C'est donc là, en particulier, que le choix des valeurs de départ $(\bar{\alpha}-0.5), (\bar{\alpha}+0.5), \bar{\alpha}$ sera intéressant.

REMARQUE :

Comme nous l'avons fait pour d'autres méthodes (Bairstow, J.G.M...) nous avons essayé le test dit "d'oscillations". C'est-à-dire, si après avoir obtenu une certaine précision, les valeurs successives de z_i conduisent à des oscillations sur $|f(z_i)|$, on arrête les itérations.

Un programme a été fait en conséquence, et nous avons ainsi obtenu un gain sensible sur le nombre d'itérations mais généralement avec une perte de précision.

En effet, le test a) conduit à une valeur approchée qui, dans de nombreux cas, est meilleur que la valeur obtenue à la première oscillation.

Donc le gain en itération étant compensé par la perte en précision, nous suggérons de ne pas utiliser ce programme sauf dans le cas où l'utilisateur demanderait une précision extrêmement importante, ce qui, dans les autres programmes, nécessiterait un très grand nombre d'itérations pour un gain hypothétique sur la précision.

Comme sécurité, nous avons fixé un nombre maximal d'itérations qui peut être fourni par le programme.

4 - Résultats comparatifs des différents programmes

Soit (I) le programme utilisant toujours les mêmes valeurs initiales, $(-i, i, 0)$ et (II) celui, qui à partir de la 2ème racine, repart avec $(\bar{\alpha}-0.5), (\bar{\alpha}+0.5), \bar{\alpha}$.

4.1. Polynôme $P_{23} \quad (z-1)^4(z-2)^3(z-3)^2(z-4) = 0$

$$\epsilon = 1.10^{-12}$$

Avec (I), en 164 itérations nous avons obtenu :

1	0.9999930898216620D+00	0.5730607634159698D-03
2	0.9999939898216620D+00	-0.5730607634159698D-03
3	0.2000128009331458D+01	0.4105990408705503D-03
4	0.2000291613988873D+01	-0.3161779384385911D-03
5	0.1999580376525899D+01	-0.3442121068452562D-04
6	0.9994329813430028D+00	-0.7785061883528335D-08
7	0.2999997077352960D+01	0.4253683355432372D-05
8	0.1000579039109592D+01	0.7822606826928800D-08
9	0.5000002922707152D+01	-0.4253615451361100D-05
10	0.399999999999996135D+01	0.2804348806266292D-11

Avec (II), il n'en a fallu que 108 pour des résultats semblables :

		ité
1	0.9999930898216620D+00	49
2	0.9999939898216620D+00	0
3	0.9994329830876373D+00	5
4	0.1000579037355915D+01	4
5	0.2000121159783943D+01	30
6	0.2000242479388978D+01	3
7	0.1999636380723054D+01	3
8	0.5000005458599497D+01	13
9	0.2999994541423509D+01	1
10	0.399999999999996135D+01	0

REMARQUES :

Pour des résultats semblables, le gain en itérations est important (108/164). De plus, à l'aide du dernier tableau, nous pouvons trouver l'ordre de multiplicité de chaque racine. En traçant la courbe du nombre d'itérations en fonction du numéro de la racine, nous trouvons trois pics : pour la 1ère racine (49 itérations), les trois sui-

vantes nécessitent un petit nombre d'itérations, ce qui signifie qu'elles sont dans le voisinage de la lère, puis pour la 5ème (30 itérations) et enfin pour la 8ème (13 itérations).

Nous pouvons noter que les racines ont été obtenues par ordre croissant dans (II), ce qui n'est pas le cas avec (I).

Nous avons fait un essai avec (II) plus le test sur les oscillations (voir 3.2.) ; 103 itérations ont conduit à des résultats légèrement moins bons qu'avec (II) seul (un seul cas d'oscillation a été constaté).

1	0.9999939898216620D+00	0.5730607634159698D-03
2	0.9999939898216620D+00	-0.5730607634159698D-03
3	0.9994329830876373D+00	-0.1052531612923417D-12
4	0.1000579037355915D+01	0.1059408829850363D-12
5	0.2000121159783943D+01	0.3498431214051578D-03
6	0.2000121159783943D+01	-0.3498431214051578D-03
7	0.1999757484461677D+01	-0.2255598591540746D-14
8	0.3000000078113745D+01	0.3958564048915989D-03
9	0.3000000078113745D+01	-0.3958564048915989D-03
10	0.4000000039650062D+01	0.1561955859791242D-14

Les valeurs de $|P(z_i)|$ pour $i=8,9,10$ sont dans ce cas nettement moins bonnes qu'avec (II).

4.2. Polynôme P_{34}

Les racines de ce polynôme sont voisines et de module inférieur à 1.

$$\epsilon = 1.10^{-13}$$

Résultats avec (I) puis avec (II) : (voir page suivante)

Avantages de (II) par rapport à (I) :

- le nombre d'itérations (135/293)
- les racines sont trouvées par module croissant et par paires ce qui n'est pas le cas dans (I).

Notons que (I) plus le test d'oscillations aurait permis de ramener le nombre d'itérations de 293 à 237 (8 cas d'oscillations ont été ainsi décelés).

Tableaux de 4.2.

1	-0.1507753016711241D-04-0.3116968149813309D+00
2	-0.1507753016711241D-04 0.3116968149813309D+00
3	-0.1426788610366293D-03 0.3086122061686346D+00
4	-0.1426788610366293D-03-0.3086122061686346D+00
5	-0.2320944705961114D-02-0.2925837453275985D+00
6	-0.4914499534545820D-03 0.3041823852115234D+00
7	-0.1869499534388396D-01 0.2530456818765656D+00
8	-0.1869499534387599D-01-0.2530456818755703D+00
9	-0.4698275301810403D-04 0.3106615284955000D+00
10	-0.4698245429696802D-04-0.3106615288159085D+00
11	-0.1324472469902441D+00 0.1360055079513756D+00
12	-0.1324472469902485D+00-0.1360055079513860D+00
13	-0.2320944718778616D-02 0.2925837452995173D+00
14	-0.4914500437945327D-03-0.3041823850882913D+00
15	-0.2928248153797145D-05-0.3121967029051641D+00
16	-0.2928025855099426D-05 0.3121967031296361D+00

en 293 itérations

1	-0.1507753016711241D-04-0.3116968149813309D+00
2	-0.1507753016711241D-04 0.3116968149813309D+00
3	-0.2933963132428146D-05-0.3121966966105864D+00
4	-0.2933963132428146D-05 0.3121966966105864D+00
5	-0.1426884786491399D-03-0.3086121939157760D+00
6	-0.1426884786491483D-03 0.3086121939157760D+00
7	-0.4696894552272682D-04-0.3106615446520513D+00
8	-0.4696894552275305D-04 0.3106615446520513D+00
9	-0.4914481461736957D-03-0.3041823879897474D+00
10	-0.4914481461736380D-03 0.3041823879897474D+00
11	-0.2320944779228285D-02-0.2925837451352676D+00
12	-0.2320944779228440D-02 0.2925837451352675D+00
13	-0.1869499534421631D-01-0.2530456818777504D+00
14	-0.1869499534421658D-01 0.2530456818777506D+00
15	-0.1324472469902470D+00-0.1360055079513763D+00
16	-0.1324472469902459D+00 0.1360055079513761D+00

en 135 itérations.

4.3. Polynôme P_{24} à racines multiples complexes

Résultats avec $\varepsilon = 1.10^{-12}$

1	-0.4992560819223307D+00	0.1660563964457954D+01
2	-0.4992560819223307D+00	-0.1660563964457954D+01
3	-0.4977205692816822D+00	-0.1657572856757702D+01
4	-0.4977205692816822D+00	0.1657572856757702D+01
5	-0.5009302020089839D+00	-0.1320204883966976D+01
6	-0.5009302020089839D+00	0.1320204883966976D+01
7	-0.4973256630736121D+00	0.1321917884821983D+01
8	-0.4973256630736121D+00	-0.1321917884821983D+01
9	-0.5007682792191509D+00	-0.1656028740241666D+01
10	-0.5007682792191509D+00	0.1656028740241666D+01
11	-0.4990456091451316D+00	0.1325578423339085D+01
12	-0.4990456091451316D+00	-0.1325578423339085D+01
13	-0.5026985022152020D+00	-0.1323801436378852D+01
14	-0.5026985022152020D+00	0.1323801436378852D+01
15	-0.5022550931339055D+00	0.1659084012875016D+01
16	-0.5022550931339055D+00	-0.1659084012875016D+01

en 164 itérations.

1	-0.4992560819223307D+00	0.1660563964457954D+01
2	-0.4992560819223307D+00	-0.1660563964457954D+01
3	-0.4977210726437367D+00	0.1657573239691763D+01
4	-0.4977210726437367D+00	-0.1657573239691763D+01
5	-0.5007673842100466D+00	0.1656028843027305D+01
6	-0.5007673842100466D+00	-0.1656028843027305D+01
7	-0.5022554842993855D+00	0.1659083526729952D+01
8	-0.5022554842993855D+00	-0.1659083526729952D+01
9	-0.4973055208485818D+00	0.1321920617346191D+01
10	-0.4973055208485818D+00	-0.1321920617346191D+01
11	-0.4990487541491068D+00	0.1325597982762405D+01
12	-0.4990487541491068D+00	-0.1325597982762405D+01
13	-0.5027176574031414D+00	0.1323798892195965D+01
14	-0.5027176574031414D+00	-0.1323798892195965D+01
15	-0.5009280445236699D+00	0.1320185136628703D+01
16	-0.5009280445236699D+00	-0.1320185136628703D+01

en 95 itérations.

4.4. Polynôme P_{17} à coefficients quelconques

Avec $\epsilon = 1.10^{-10}$, des résultats semblables ont été trouvés. La différence du nombre d'itérations n'est pas significative ; cette même remarque a été faite sur d'autres polynômes testés.

Avec (I) :

ORDRE	RACINE
*****	*****
1	-0.5871954694441242D+00 0.4819686406542050D+00
2	-0.5871954694441242D+00-0.4819686406542050D+00
3	0.2208328177557138D+00 0.7000044671195128D+00
4	0.2208328177557138D+00-0.7000044671195128D+00
5	0.8127598822973307D+00 0.6147974641206670D-01
6	0.8127598822973307D+00-0.6147974641206670D-01
7	-0.2094825010569939D+00 0.8999616203424486D+00
8	-0.2094825010569939D+00-0.8999616203424486D+00
9	-0.8845981101347652D+00 0.3015196624878853D+00
10	-0.8845981101347652D+00-0.3015196624878853D+00
11	0.6330847695957171D+00 0.6931412365679314D+00
12	0.6330847695957171D+00-0.6931412365679314D+00
13	-0.3772294486822797D+00 0.8980728714458923D+00
14	-0.3772294486822797D+00-0.8980728714458923D+00
15	0.1053012576933872D+01-0.8770370332529050D-01
16	0.1053012576933872D+01 0.8770370332529050D-01
17	-0.9828508293041573D+00-0.1124801357472249D+00
18	-0.9828508293041573D+00 0.1124801357472249D+00
19	0.1585296127449700D+00-0.1000329321155863D+01
20	0.1585296127449700D+00 0.1000329321155863D+01
21	0.8264593742598167D+00-0.5773500166906758D+00
22	0.8264593742598167D+00 0.5773500166906758D+00
23	-0.5831113093215666D+00-0.7852246824487611D+00
24	-0.5831113093215666D+00 0.7852246824487611D+00
25	0.5788786350404936D+00-0.7720099987184771D+00
26	0.5788786350404936D+00 0.7720099987184771D+00
27	-0.7466486855989101D+00 0.6041234511097463D+00
28	-0.7466486855989101D+00-0.6041234511097463D+00
29	0.3926236739841031D+00-0.9249986412917113D+00
30	0.3926236739841031D+00 0.9249986412917113D+00
31	-0.7258235770375280D-01-0.9908757214508048D+00
32	-0.7258235770375280D-01 0.9908757214508048D+00
33	-0.8372852532272531D+00 0.3962960915826675D+00
34	-0.8372852532272531D+00-0.3962960915826675D+00
35	0.9538469053712236D+00 0.3607127224355884D+00
36	0.9538469053712236D+00-0.3607127224355884D+00

en 200 itérations.

Avec (II) :

ORDRE	RACINE
*****	*****
1	-0.5871954694441242D+00 0.4819686406542050D+00
2	-0.5871954694441242D+00-0.4819686406542050D+00
3	0.2208328177557137D+00-0.7000044671195129D+00
4	0.2208328177557137D+00 0.7000044671195129D+00
5	0.6330847695957317D+00-0.6931412365679399D+00
6	0.6330847695957317D+00 0.6931412365679399D+00
7	0.5788786350404843D+00-0.7720099987184846D+00
8	0.5788786350404843D+00 0.7720099987184846D+00
9	0.8127598822973537D+00 0.6147974641207186D-01
10	0.8127598822973537D+00-0.6147974641207186D-01
11	-0.2094825010569728D+00 0.8999616203424309D+00
12	-0.2094825010569728D+00-0.8999616203424309D+00
13	-0.3772294486822642D+00 0.8980728714459026D+00
14	-0.3772294486822642D+00-0.8980728714459026D+00
15	-0.5831113093215501D+00 0.7852246824487692D+00
16	-0.5831113093215501D+00-0.7852246824487692D+00
17	-0.7466486855988739D+00 0.6041234511097571D+00
18	-0.7466486855988739D+00-0.6041234511097571D+00
19	-0.8372852532271510D+00 0.3962960915827818D+00
20	-0.8372852532271510D+00-0.3962960915827818D+00
21	-0.8845981101349199D+00 0.3015196624879478D+00
22	-0.8845981101349199D+00-0.3015196624879478D+00
23	-0.9828508293042123D+00 0.1124801357472212D+00
24	-0.9828508293042125D+00-0.1124801357472210D+00
25	0.1585296127445377D+00-0.1000329321155786D+01
26	0.1585296127445377D+00 0.1000329321155786D+01
27	0.3926236739840906D+00-0.9249986412923940D+00
28	0.3926236739840906D+00 0.9249986412923940D+00
29	0.9538469053807442D+00-0.3607127224317251D+00
30	0.9538469053807442D+00 0.3607127224317251D+00
31	0.1053012576924460D+01-0.8770370330643910D-01
32	0.1053012576924460D+01 0.8770370330643910D-01
33	0.8264593742600758D+00-0.5773500166939902D+00
34	0.8264593742600758D+00 0.5773500166939902D+00
35	-0.7258235770368440D-01-0.9908757214506872D+00
36	-0.7258235770368440D-01 0.9908757214506872D+00

en 203 itérations.

D'autres essais ont été effectués, les résultats sont regroupés dans le tableau final.

5 - Conclusion

Des deux programmes utilisés, il est souhaitable de choisir le (II) dans le cas de racines multiples ou voisines. La convergence est alors nettement accélérée.

Si la répartition des racines est régulière, on pourra utiliser au choix (I) ou (II) sans qu'il apparaisse à priori un avantage significatif pour l'une ou l'autre méthode.

En définitif, la méthode de Muller est particulièrement recommandée dans le cas de polynôme de degré élevé, puisqu'elle ne nécessite que le calcul de la fonction à chaque itération (son indice d'efficacité est au moins $= 1.84^1 = 1.84$).

Le point faible de la méthode concernait les polynômes mal conditionnés, nous avons pu voir qu'un choix spécial des valeurs de départ peut généralement atténuer cet inconvénient.

Le temps de calcul semble être proportionnel à $n^{3/2}$.

Méthodes à ordre de convergence élevé

1 - Introduction

Ces méthodes, spécialement étudiées par OSTROWSKI [41] et TRAUB [50], sont comparables à la technique de RUNGE KUTTA (par exemple) pour la résolution d'équations différentielles.

On utilise des paramètres libres pour imposer certaines contraintes, en particulier pour obtenir un certain ordre de convergence dans le cas d'une racine simple d'une fonction donnée.

A chaque itération x_{n+1} , on calcule une ou plusieurs valeurs de la fonction en des points différents.

Ces points ne sont, cependant, fonction que de l'itération précédente x_n et non de résultats de plusieurs itérations antérieures comme dans le chapitre IV.D.

En utilisant la terminologie de TRAUB, il ne s'agit donc pas d'itérations avec "mémoires".

TRAUB a proposé et étudié au moins deux telles familles de méthodes itératives :

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad \phi(x) &= x - \sum_{k=1}^{p-1} a_k^p \omega_k^p(x) \\
 \text{avec} \quad \omega_k^p(x) &= f \left[x + \sum_{j=1}^{k-1} b_{k,j}^p \omega_j^p(x) \right] / f'(x) \quad k > 1 \\
 \omega_1^p(x) &= u(x) \quad \text{et} \quad u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \\
 \text{b)} \quad \psi(x) &= x - \sum_{k=1}^{p-1} c_k^p \Omega_k^p(x) \\
 \text{avec} \quad \Omega_k^p(x) &= f(x)/f' \left[x + \sum_{j=1}^{k-1} d_{k,j}^p \Omega_j^p(x) \right] \quad k > 1 \\
 \text{avec} \quad \Omega_1^p(x) &= u(x)
 \end{aligned}$$

TRAUB a montré que b) était meilleure que a), c'est pourquoi nous avons testé quelques formules de cette famille ayant des ordres de convergence élevés.

2 - Méthode du 3ème ordre

2.1. Etude théorique

L'étude en a été faite par TRAUB [51] et reprise par JARRATT [20] .

Nous considérons la famille simplifiée de méthodes itératives, définie par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{a_1 \omega_1(x_n) + a_2 \omega_2(x_n)} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 \text{avec} \quad \omega_1(x_n) &= f'(x_n) \\
 \omega_2(x_n) &= f'(x_n + \beta u(x_n)) \quad \text{avec} \quad u = \frac{f}{f'} .
 \end{aligned}$$

Soit $\epsilon_n = \alpha - x_n$ si α est une racine simple de $f(x)$.

En prenant les différents développements de Taylor et en remplaçant dans (1), après soustraction à gauche et à droite de α , on a :

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1} = \epsilon_n \left(1 - \frac{c_1}{d_1}\right) + \frac{1}{d_1} \left(\frac{c_1 d_2}{d_1} - c_2\right) \epsilon_n^2 \\ + \frac{1}{d_1} \left[\frac{1}{d_1} (c_2 d_2 + c_1 d_3) - c_1 \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 - c_3 \right] \epsilon_n^3, \end{aligned}$$

avec $c_i = \frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!}$

et
$$\begin{cases} d_1 = c_1(a_1 + a_2) \\ d_2 = 2c_2[a_1 + (1+\beta)a_2] \\ d_3 = 3c_3a_1 + a_2[3c_3(1+\beta)^2 - 2\frac{c_2^2}{c_1}\beta] \end{cases}$$

Donc, pour obtenir une méthode du 3ème ordre, il suffit de choisir a_1 , a_2 et β tels que :

$$\begin{cases} 1 - \frac{c_1}{d_1} = 0 \\ c_1 \frac{d_2}{d_1} - c_2 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant, on arrive au système :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ 2(1 + \beta a_2) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a_1 = \frac{1+2\beta}{2\beta} \\ a_2 = -\frac{1}{2\beta} \end{cases}$$

Il suffit alors d'attribuer une valeur quelconque à β pour obtenir une méthode du 3ème ordre.

Une valeur de β intéressante est celle qui annule a_1 , c'est-à-dire : $\beta = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

d'où la formule itérative :

$$(I) \quad \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n - \frac{1}{2} u(x_n))}} \quad \text{avec } u(x_n) = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Son indice d'efficacité pour des racines simples est de :

$$3^{1/3} = 1.44 .$$

Le facteur de convergence est donné alors par :

$$K = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 - \frac{c_3}{c_1} \left(\frac{3}{2}\beta + 1\right) \quad \text{c'est-à-dire avec } \beta = -\frac{1}{2}$$

$$K = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 - \frac{c_3}{4c_1} .$$

Ce facteur peut être simplifié en prenant $\beta = -\frac{2}{3}$, ce qui conduit à une autre formule du 3ème ordre

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{4f(x_n)}{[f'(x_n) + 3f'(x_n - \frac{2}{3} u(x_n))]}}$$

avec $K = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2$. Son indice d'efficacité est identique au précédent. Seule la première formule a été programmée.

2.2. Remarques

Si la racine est multiple, alors la convergence redevient linéaire.

Par exemple, pour une racine double ($c_1 = 0$), un calcul identique à 2.1. conduirait à :

$$\varepsilon_{n+1} = \left[1 - \frac{1}{2(a_1 + a_2(1 + \frac{\beta}{2}))}\right] \varepsilon_n + O(\varepsilon_n^2) ,$$

ou encore, en utilisant $\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 = -\frac{1}{2\beta} \end{cases} ,$

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{3} \varepsilon_n + o[\varepsilon_n^2] \quad .$$

Donc, asymptotiquement, toutes les 3 itérations nous gagnons un chiffre significatif.

3 - Méthode du 5ème ordre

Etude : (cf. JARRATT [20])

Pour augmenter l'ordre, il est nécessaire d'accroître le nombre de paramètres.

On peut donc généraliser la forme précédente en considérant :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{a_1 \omega_1(x_n) + a_2 \omega_2(x_n) + a_3 \omega_3(x_n)}$$

avec en plus $\omega_3 = f' \left[x_n + \gamma u(x_n) + \delta \frac{f(x_n)}{\omega_2(x_n)} \right]$.

Le principe est identique à celui de la méthode précédente. En principe, nous devons obtenir une formule du 4ème ordre mais par un choix particulier des paramètres, nous pouvons annuler tous les coefficients des termes en ε , ε^2 , ε^3 et ε^4 .

D'où la formule du 5ème ordre obtenue en prenant :

$$a_1 = \frac{1}{6}, a_2 = \frac{1}{6}, a_3 = \frac{2}{3}, \beta = -1, \gamma = -\frac{1}{8} \text{ et } \delta = -\frac{3}{8} \quad .$$

$$(III) \implies \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{6f(x_n)}{f'(x_n) + f'(x_n - u(x_n)) + 4f'(x_n - \frac{1}{8}u(x_n)) - \frac{3}{8} \frac{f}{\omega_2}}}$$

Cette formule semble être la seule méthode existante du 5ème ordre nécessitant seulement le calcul d'une fonction et de trois dérivées, par itération.

seulement le calcul d'une fonction et de trois dérivées, par

Son indice d'efficacité est intéressant ($5^{1/4} \approx 1.495$) .

REMARQUE :

- . Avec $a_1 = \frac{1}{10}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{2}{5}$, $\beta = -\frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{25}{24}$, $\delta = -\frac{15}{8}$,
on obtient une méthode du 4ème ordre donc moins performante.
- . La méthode du 5ème ordre a été programmée.

4 - Méthode du 4ème ordre

cf. JARRATT [22] .

JARRATT considère la famille de méthodes de la forme :

$$\varphi(x) = x - a_1 \omega_1(x) + \sum_{r=1}^n a_{r+1} \frac{\omega_2^r(x)}{u^{r-1}} .$$

Elle est tout à fait comparable à celle proposée par TRAUB.

Il étudie un cas simple en prenant :

$$\varphi(x) = x - a_1 \omega_1(x) - a_2 \omega_2(x) - a_3 \frac{\omega_2^2(x)}{u(x)}$$

avec $\omega_1(x) = \frac{f}{f'}$, $\omega_2 = \frac{f}{f'[x+\beta u]}$.

Une étude identique aux précédentes permettant d'annuler les termes en ε , ε^2 , ε^3 conduit au choix de paramètres suivant :

$$a_1 = \frac{5}{8} , a_2 = 0 , a_3 = \frac{3}{8} , \beta = -\frac{2}{3} .$$

D'où la formule itérative du 4ème ordre qui a été programmé .

$$(II) \quad \left| \quad x_{n+1} = x_n - \frac{5}{8} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{3}{8} \frac{f(x_n) \cdot f'(x_n)}{\left[f' \left(x_n - \frac{2}{3} \frac{f}{f'} \right) \right]^2} \right|$$

Cette méthode ne nécessite que l'évaluation d'une fonction et de 2 dérivées par itération.

Son indice d'efficacité est donc : $4^{1/3} \approx 1.587$

5 - Comparaison de ces méthodes

Pour chaque méthode, deux programmes ont été faits : en réel et en complexe. Ils sont pratiquement identiques à ceux de Newton ; seule la formule est modifiée.

5.1. Résultats numériques

Soient (I), méthode du 3ème ordre (cf.2.1.), (II), du 4ème (cf.4.), (III), du 5ème (cf.3.).

a) Polynôme P_{33}

Valeur initiale = 0 et $\epsilon = 1.10^{-13}$ pour les trois .

Pour (I) :

0.880 000 000 <u>028</u> 292 9	en 13 itérations
0.889 999 999 <u>912</u> 046 5	- 11 -
0.900 000 000 <u>090</u> 788 8	- 8 -
0.909 999 999 <u>968</u> 871 5	- 0 -

Pour (II) :

0.880 000 000 <u>020</u> 612 1	en 11 itérations
0.889 999 999 <u>934</u> 580 2	- 9 -
0.900 000 000 <u>069</u> 100 3	- 7 -
0.909 999 999 <u>975</u> 707 0	- 0 -

Pour (III) :

0.879 999 999 <u>266</u> 556 1	en 9 itérations
0.890 000 002 <u>197</u> 827 8	- 8 -
0.899 999 997 <u>804</u> 724 5	- 6 -
0.910 000 000 <u>730</u> 891 4	- 0 -

Pour des résultats semblables, le nombre d'itérations passe de 32 à 27 puis à 23.

b) Polynôme P_{21}

Valeur initiale = 0 et $\epsilon = 1.10^{-14}$

Avec (I) :

LES RACINES TROUVEES SONT

0.9868411346781000D-01	0.4550898605622274D+00
0.1000000000000000D+01	-0.1258890012362495D-15
0.1999999919792125D+01	-0.4499842659488325D-08
0.2000000080207874D+01	0.4499842740743722D-08
-0.2098684113467808D+01	-0.4550898605622273D+00

Au total : 34 itérations.

Avec (II) :

LES RACINES TROUVEES SONT

0.9868411346781000D-01	0.4550898605622273D+00
0.1000000000000000D+01	-0.7986359770366753D-16
0.1999999892538624D+01	-0.8517427813712398D-07
0.2000000107461374D+01	0.8517427387855973D-07
-0.2098684113467808D+01	-0.4550898605622230D+00

Au total : 29 itérations.

Avec (III) :

LES RACINES TROUVEES SONT

0.9868411346780960D-01	0.4550898605622266D+00
0.1000000000000001D+01	0.1705156096887001D-14
0.1999999949636506D+01	-0.2649456944384991D-07
0.2000000050363492D+01	0.2649456795833981D-07
-0.2098684113467809D+01	-0.4550898605622268D+00

Au total : 25 itérations.

La précision est nettement plus faible dans le cas de la racine multiple, la convergence devenant linéaire.

c) Polynôme P_{13}

$$\epsilon = 1.10^{-13}$$

Les trois méthodes ont donné les résultats exacts en :

35 itérations pour (I),

22 itérations pour (II),

28 itérations pour (III).

Bien que les valeurs initiales soient les mêmes, les racines n'ont pas été trouvées dans le même ordre, ce qui explique le nombre plus élevé d'itérations en (III) qu'en (II).

5.2. Remarques

Généralement, la méthode du 5ème ordre (III) donne les résultats en moins d'itérations que les deux autres, mais le temps de calcul peut être plus élevé puisque à chaque itération, il y a une dérivée supplémentaire à calculer.

D'ailleurs, si on se réfère à l'indice d'efficacité, c'est (II) qui semble la plus intéressante.

Plus encore, pour que la convergence soit assurée dans (I) et (III), il est nécessaire de prendre les valeurs initiales suffisamment proches des racines.

Par exemple, en partant avec 0.5i dans le cas c), après 50 itérations, la convergence n'avait pas encore commencé.

$$(f(x_1) \approx -0.39 \cdot 10^6, f(x_{50}) \approx -0.38 \cdot 10^6).$$

En effet, les dénominateurs de (I) et (III) sont fonction de dérivées prises en des points autres que x_n . Si ces dérivées sont très grandes par rapport à $f(x_n)$, alors le quotient $f(x_n)/\text{Dénominateur}$ est très petit, x_{n+1} est voisin de x_n , la convergence est alors extrêmement lente.

Plus généralement, la famille de méthodes (§ 1.b) présentera ce grave défaut.

Par contre, (II) n'a pas cet inconvénient majeur, car la correction sur x_n est donnée par la somme de deux quotients dont l'un ,

$-\frac{5}{8} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ne dépend que de x_n et est donc numériquement stable.

C'est ainsi que pour le polynôme 5.1.c), avec 0.5i comme point de départ, en 7 itérations une racine a été trouvée.

6 - Conclusion

Si l'on doit choisir entre les méthodes présentées dans ce chapitre, nous suggérons de prendre celle proposée par JARRATT [22] :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{5}{8} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{3}{8} \frac{f(x_n)f'(x_n)}{\left[f'(x_n) - \frac{2}{3} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right]^2}$$

Nous l'avons choisi aussi, pour l'associer à des méthodes de dégrossissage afin de les transformer en méthodes de résolution (cf. la méthode de LEHMER, chapitre II.A.).

Il faut cependant noter qu'elle est, comme les deux autres, affectée par la multiplicité des racines.

TRAUB [50], fournit une liste de méthodes avec leur ordre de convergence, obtenues à partir des familles définies au § 1.

- C -

Méthode générale de résolution
(extension de la méthode proposée par
JARRATT-GARSDIE-MACK)

1 - Introduction

Il peut arriver que les méthodes classiques ne convergent pas dans certains cas particuliers (ex : la méthode de Bairstow diverge pour la famille de polynômes $z^n - a = 0$ avec $p = q = 0$). La méthode de Newton peut osciller autour d'un point d'inflexion ou d'un point de selle ; de plus, pour un polynôme à coefficients réels et à racines complexes, ces dernières ne seront jamais trouvées si la valeur de départ x_0 est réelle.

D'autre part, la convergence de ces méthodes, ainsi que celle de Muller, est considérablement affaiblie par la présence de racines voisines ou multiples.

Nous pouvons noter aussi que certaines méthodes ne sont appliquées que pour des polynômes à coefficients réels (BAIRSTOW ...).

En fait, chacune a ses "qualités" propres.

Le but recherché, ici, est donc de mettre au point une méthode associant deux ou trois formules itératives dont les "qualités" sont complémentaires.

Un choix pourra donc être fait à chaque itération et réduira ainsi considérablement la probabilité de cyclage ou de non-convergence.

Quelles sont les formules itératives choisies ?

Nous utiliserons les mêmes que celles proposées par JARRATT [23] :

a) Evidemment, NEWTON-RAPHSON dont les avantages sont multiples (convergence rapide en général et à peu de frais).

Par contre, convergence faible pour des racines voisines ou multiples.

b) Pour pallier cet inconvénient, on utilisera une méthode d'interpolation, passant par trois points, appliquée à $\frac{f(z)}{f'(z)}$ de façon à ce que l'ordre de convergence ne soit pas affecté par l'ordre de multiplicité.

c) La formule d'interpolation utilisée en b) nécessite trois points d'appui. Ces valeurs pourront être fournies par a), b) et une méthode d'interpolation appliquée à $\psi(z) = \frac{f(z)}{z^m}$.

2 - Etude de ces trois méthodes

2.1. Méthode de NEWTON

Elle a été précédemment étudiée. Nous prendrons la formule simple

$$z_{n+1} = a'' = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad (1)$$

Nous aurions pu penser utiliser NEWTON-P, mais comme il a été vu, cette dernière peut être instable au voisinage d'une racine multiple et nécessiterait de nombreux calculs supplémentaires.

2.2. Interpolation par trois points pour $\frac{f(z)}{f'(z)}$

2.2.1. Formule

En utilisant les notations de JARRATT [23], on est amené à poser $\frac{1}{F(z)} = \frac{f(z)}{f'(z)}$.

Nous nous proposons d'approcher $y = \frac{1}{F(z)}$ par $\frac{z-A}{Bz+C}$. L'interpolation sur cette dernière fonction se fera à l'aide de trois points z_{n-2}, z_{n-1}, z_n .

REMARQUE :

On pourrait songer à une interpolation par quatre points. Le dénominateur de la fonction d'interpolation serait alors de la forme $Bz^2 + Cz + D$. On aurait une légère amélioration de l'ordre de convergence (1.92 contre 1.84) pour une augmentation considérable des calculs (cf. étude faite en IV.D.)

A partir de z_{n-2}, z_{n-1}, z_n , avec $y = \frac{f(z)}{f'(z)} = \frac{z-A}{Bz+C}$, nous pourrions déterminer A, qui sera considérée comme nouvelle approximation de la racine α cherchée.

Nous poserons alors $z_{n+1} = A$.

Choisissons une nouvelle origine en posant :

$$\beta = z - z_n \implies \begin{cases} \beta_n = 0 \\ \beta_{n-1} = z_{n-1} - z_n \\ \beta_{n-2} = z_{n-2} - z_n \end{cases}$$

$$\implies y = \frac{\beta - a}{b\beta + c} \quad \text{ou encore} \quad \beta = a + b\beta y + cy.$$

Nous cherchons donc à déterminer a qui sera une approximation de $\alpha - z_n = z_{n+1} - z_n$ et que l'on posera égal à β_{n+1} .

En se plaçant en z_n, z_{n-1}, z_{n-2} , nous obtenons trois équations à trois inconnues:

$$\begin{cases} 0 = a + 0 + cy_n \\ \beta_{n-1} = a + b\beta_{n-1}y_{n-1} + cy_{n-1} \\ \beta_{n-2} = a + b\beta_{n-2}y_{n-2} + cy_{n-2} \end{cases}$$

$$\implies a = \beta_{n+1} = \frac{y_n \beta_{n-1} \beta_{n-2} (y_{n-2} - y_{n-1})}{\beta_{n-1} y_{n-1} (y_{n-2} - y_n) + \beta_{n-2} y_{n-2} (y_n - y_{n-1})}$$

D'où, en revenant à z :

$$z_{n+1} - z_n = \frac{\frac{1}{F_n} (z_{n-1} - z_n)(z_{n-2} - z_n) \left(\frac{1}{F_{n-2}} - \frac{1}{F_{n-1}} \right)}{(z_{n-1} - z_n) \frac{1}{F_{n-1}} \left(\frac{1}{F_{n-2}} - \frac{1}{F_n} \right) + (z_{n-2} - z_n) \left(\frac{1}{F_n} - \frac{1}{F_{n-1}} \right) \frac{1}{F_{n-2}}}$$

d'où

$$z_{n+1} = z_n + \frac{(z_{n-1} - z_n)(z_{n-2} - z_n)(F_{n-1} - F_{n-2})}{(z_{n-1} - z_n)(F_n - F_{n-2}) + (z_{n-2} - z_n)(F_{n-1} - F_n)} \quad (2)$$

relation qui donne z_{n+1} en fonction de z_n plus un terme correctif.

Dans la suite z_{n+1} sera appelé a .

2.2.2. Ordre de convergence (cf. JARRATT-NUDDS [24])

L'étude est faite dans le cas général pour une fonction $y = f(z)$.

a) Cas des racines simples

$$\text{Soit } y = f(z) = \frac{z-A}{Bz+C}$$

Nous poserons $f(z) = f$ $f(z_n) = f_n$.

Ecrivons l'expression

$$z = A + Bzf + Cf \quad \text{aux points } z_{n-2}, z_{n-1}, z_n.$$

Soit :

• α la racine cherchée que nous prendrons comme nouvelle origine,

• $\epsilon_n = \alpha - z_n \Rightarrow \epsilon_n = -z_n$ avec la nouvelle origine.

De plus $z_{n+1} = A = -\epsilon_{n+1}$.

D'après l'expression générale ci-dessus, nous avons quatre équations en A, B, C :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\epsilon_{n+1} = A \\ -\epsilon_n = A + B\epsilon_n f_n + Cf_n \\ -\epsilon_{n-1} = A + B\epsilon_{n-1} f_{n-1} + Cf_{n-1} \\ -\epsilon_{n-2} = A + B\epsilon_{n-2} f_{n-2} + Cf_{n-2} \end{array} \right.$$

La condition de compatibilité va nous donner la relation cherchée entre ϵ_{n+1} , ϵ_n , ϵ_{n-1} , ϵ_{n-2} .

$$\left| \begin{array}{cccc} \epsilon_{n+1} & 1 & 0 & 0 \\ \epsilon_n & 1 & \epsilon_n f_n & f_n \\ \epsilon_{n-1} & 1 & \epsilon_{n-1} f_{n-1} & f_{n-1} \\ \epsilon_{n-2} & 1 & \epsilon_{n-2} f_{n-2} & f_{n-2} \end{array} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{n+1} = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon & \varepsilon f & f \\ 1 & \varepsilon f & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon f & f \end{vmatrix}} \quad n, n-1, n-2$$

Prenons le développement de Taylor au voisinage de la racine α :

$$f(z_i) = f(\alpha) + (z_i - \alpha)f'(\alpha) + \dots + \frac{(z_i - \alpha)^p}{p!} f^{(p)}(\alpha) + \dots$$

$$f(z_i) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon_i^p \quad \text{avec} \quad c_p = \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!}$$

Appliquons ce développement pour $i = n, n-1, n-2$, et, en substituant nous obtenons :

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^{p+1} & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^p \\ 1 & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^{p+1} & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^{p+1} & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^p \end{vmatrix}} \quad n, n-1, n-2$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \times \varepsilon_{n-1} \times \varepsilon_{n-2} \frac{\begin{vmatrix} 1 & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^p & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^{p-1} \\ 1 & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^{p+1} & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^{p+1} & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^p \end{vmatrix}} \quad n, n-1, n-2$$

Nous cherchons à mettre le quotient des deux déterminants sous la forme $1 + \theta(\varepsilon)$

$$\begin{vmatrix} 1 & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^p & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^{p-1} \\ 1 & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^{p+1} & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^p \end{vmatrix} \quad n, n-1, n-2 \quad \text{peut se décomposer en}$$

la somme de plusieurs déterminants.

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} 1 & c_1 \varepsilon + c_2 \varepsilon^2 + c_3 \varepsilon^3 & c_1 + c_2 \varepsilon + c_3 \varepsilon^2 + c_4 \varepsilon^3 \end{vmatrix} + \dots \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & c_1 \varepsilon & c_3 \varepsilon^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & c_2 \varepsilon^2 & c_2 \varepsilon \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} 1 & c_3 \varepsilon^3 & c_5 \varepsilon^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & c_4 \varepsilon^4 & c_4 \varepsilon^3 \end{vmatrix} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \hat{\varepsilon} = \sup \{ |\varepsilon_n|, |\varepsilon_{n-1}|, |\varepsilon_{n-2}| \}.$$

On obtient alors :

- le 1er déterminant est nul,
- dans le 4ème, le 5ème et le suivant, en remplaçant $\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_{n-2}$ par $\hat{\varepsilon}$ on a :

$$\begin{vmatrix} 1 & c_3 \hat{\varepsilon}^3 & c_5 \hat{\varepsilon}^4 \\ \end{vmatrix} = \hat{\varepsilon}^4 \begin{vmatrix} 1 & c_3 \hat{\varepsilon} & c_5 \hat{\varepsilon}^2 \\ \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est donc de l'ordre du second multiplié par $\hat{\varepsilon}^4$.

Il est un infiniment petit d'ordre 4 par rapport au 2ème et au 3ème.

L'ordre d'infinitude va, à fortiori, croître avec les suivants et

$\begin{vmatrix} 1 & \hat{\varepsilon} & \hat{\varepsilon}^2 \\ \end{vmatrix}$ peut être mis en facteur.

D'où

$$\begin{vmatrix} 1 & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^p & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^{p-1} \\ \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 1 & c_1 \varepsilon & c_3 \varepsilon^2 \\ \end{vmatrix}_{n,n-1,n-2} + \begin{vmatrix} 1 & c_2 \varepsilon^2 & c_2 \varepsilon \\ \end{vmatrix}_{n,n-1,n-2} \\ + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \hat{\varepsilon} & \hat{\varepsilon}^2 \\ \end{vmatrix} \times O(\hat{\varepsilon})}_{\text{quantité négligeable}}$$

D'où en mettant $c_1 c_3$ en facteur dans le premier terme, et c_2^2 dans le second, nous avons asymptotiquement :

$$\begin{vmatrix} 1 & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^p & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^{p-1} \\ \end{vmatrix} \approx (c_1 c_3 - c_2^2) \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \end{vmatrix}_{n,n-1,n-2}.$$

De la même façon,

$$\begin{vmatrix} 1 & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^{p+1} & \sum_{p=1}^{\infty} c_p \varepsilon^p \\ \end{vmatrix} \approx c_1^2 \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \end{vmatrix}_{n,n-1,n-2}$$

$$\implies \varepsilon_{n+1} \approx \left(\frac{-c_3}{c_1} + \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \right) \varepsilon_n \cdot \varepsilon_{n-1} \cdot \varepsilon_{n-2}$$

La convergence sera donc assurée si $\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_{n-2}$ sont suffisamment petits.

$$\varepsilon_{n+1} = K \varepsilon_n \cdot \varepsilon_{n-1} \cdot \varepsilon_{n-2} \quad \text{avec } K = \frac{-c_3}{c_1} + \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2$$

$$\text{Log } \varepsilon_{n+1} - \text{Log } \varepsilon_n - \text{Log } \varepsilon_{n-1} - \text{Log } \varepsilon_{n-2} = \text{Log } K$$

Cette équation aux différences a pour solution :

$$\text{Log } \varepsilon_n = A t_1^n + B t_2^n + C t_3^n - \frac{1}{2} \text{Log } K$$

avec t_1, t_2, t_3 solutions de l'équation caractéristique $t^3 - t^2 - t - 1 = 0$

$$\Rightarrow t_1 = 1.84 \quad t_2 = -0.420 \pm 0.606i$$

$$\text{quand } n \rightarrow \infty \quad t_{2,3}^n \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \text{Log } \varepsilon_n \approx A t_1^n - \frac{1}{2} \text{Log } K$$

$$\text{Log } \varepsilon_{n+1} \approx A t_1^{n+1} - \frac{1}{2} \text{Log } K$$

$$\Rightarrow \text{Log } \varepsilon_{n+1} \approx t_1 (\text{Log } \varepsilon_n + \frac{1}{2} \text{Log } K) - \frac{1}{2} \text{Log } K$$

$$\boxed{\varepsilon_{n+1} \approx K^{\frac{t_1-1}{2}} \times \varepsilon_n^{t_1}}$$

D'après la définition de l'ordre de convergence, celui-ci est égal ici à : 1.84 .

La convergence est donc presque quadratique.

b) Cas des racines multiples

Soit une racine double α $f'(\alpha) = 0$ donc $c_1 = 0$.

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \cdot \varepsilon_{n-1} \cdot \varepsilon_{n-2} \cdot \frac{c_2 | 1 \quad \varepsilon^2 \quad \varepsilon \quad |_{n,n-1,n-2} + \sigma_1(\hat{\varepsilon})}{c_2 | 1 \quad \varepsilon^3 \quad \varepsilon^2 \quad |_{n,n-1,n-2} + \sigma_2(\hat{\varepsilon})}$$

$$| 1 \quad \varepsilon^3 \quad \varepsilon^2 \quad | = (\varepsilon_n \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_{n-1} \varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{n-2} \varepsilon_n) | 1 \quad \varepsilon^2 \quad \varepsilon \quad |$$

Donc en négligeant $\sigma(\hat{\varepsilon})$:

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{\varepsilon_n} + \frac{1}{\varepsilon_{n-1}} + \frac{1}{\varepsilon_{n-2}}$$

Cette équation aux différences, linéaire en $\frac{1}{\varepsilon_n}$ conduit à la relation :

$$\varepsilon_{n+1} \approx \frac{1}{1.84} \varepsilon_n$$

$$\boxed{\varepsilon_{n+1} \approx 0.54 \varepsilon_n}$$

En conclusion, la convergence devient donc du 1er ordre avec un facteur de convergence relativement faible.

Donc, pour éviter cette perte de convergence dans le cas de racines multiples, la méthode d'interpolation par fraction rationnelle a été appliquée, non à $f(z)$, mais à $y = \frac{f(z)}{f'(z)}$ qui est une fonction dont les racines sont simples si $f(z)$ est une équation polynômiale (ce qui est le cas envisagé ici).

$f(z)$ étant un polynôme, les zéros de $f'(z)$ sont aussi les zéros de $f(z)$, donc la fonction $y = \frac{f(z)}{f'(z)}$ est holomorphe et admet un développement de Taylor en tous points du plan.

L'ordre de convergence, trouvé dans le cas des racines simples, est donc valable pour $\frac{f}{f'}$, ce qui entraîne que la formule (2) est d'ordre de convergence ≈ 1.84 quel que soit l'ordre de multiplicité de la racine.

2.3. Même interpolation appliquée à $\psi(z) = \frac{f(z)}{z^m}$

m est une puissance que l'on considère, pour l'instant, comme arbitraire. Les mêmes calculs qu'en 2.2.1. conduiraient à la formule de récurrence :

$$(3) \quad a' = z_{n+1} = z_n + \frac{(z_{n-2} - z_n)(z_{n-1} - z_n) \{ m(z_{n-1} - z_{n-2}) + z_{n-2}^2 F_{n-2} - z_{n-1}^2 F_{n-1} \}}{(z_{n-1} - z_n) \{ z_{n-2}^2 F_{n-2} - z_{n-1}^2 F_{n-1} \} + (z_{n-2} - z_{n-1}) \{ z_n^2 F_n - z_{n-1}^2 F_{n-1} \}}$$

La fonction $\frac{f(z)}{z^m}$ est holomorphe dans tout disque ne contenant pas l'origine ; mais la solution $z = 0$ est exclue au départ (le degré serait alors abaissé d'une unité).

Par conséquent, l'ordre de convergence est identique au cas général de 2.2.2. c'est-à-dire 1.84 pour racines simples, linéaire pour racines multiples.

Le coefficient et le facteur de convergence n'étant pas à priori les mêmes que pour la formule (2), cette méthode conduira, dans le cas général, à une valeur approchée différente de celle donnée par (2).

En outre, tous les éléments constituant (3) étant identiques à ceux de (2), le "coût" en calcul peut être considéré comme négligeable.

3 - Analyse détaillée de la méthode

3.1. Choix des valeurs initiales

Soit $f(z) = a_0 z^r + a_1 z^{r-1} + \dots + a_r = 0$ avec $a_r \neq 0$.

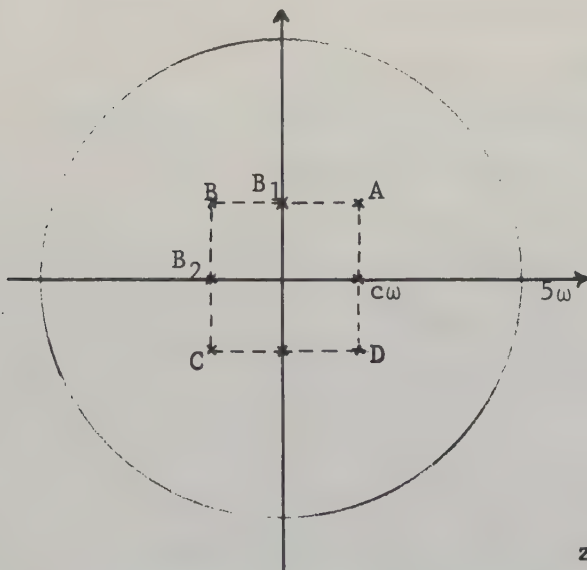
Si $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont les racines de $f(z)$, nous avons :

$$\alpha_1 \times \alpha_2 \dots \times \alpha_r = (-1)^r \frac{a_r}{a_0}.$$

On est assuré qu'il y a au moins une racine de $f(z)$ à l'intérieur du cercle de rayon $\left| \frac{a_r}{a_0} \right|^{1/r}$.

Soit donc $R = \left| \frac{a_r}{a_0} \right|^{1/r}$.

On pose $R = 5\omega$, ω réel servira d'unité pour le choix des points de départ.



Soient 4 points A,B,C,D symétriques, situés, chacun, dans un quadrant dont les coordonnées sont $c(\omega + i\omega)$, $c(\omega - i\omega)$, $c(-\omega + i\omega)$, $c(\omega + i\omega)$. c est une constante qui prendra différentes valeurs, suivant les renseignements connus sur le module des racines. Si, par exemple, nous savons qu'une ou plusieurs racines sont voisines de zéro, nous choisirons c petit, de façon

à les obtenir en premier. Nous verrons lors des essais (cf.4), l'importance de ce paramètre. Sa valeur maximale est imposée par le rayon R ; il est souhaitable, en effet, que les points A, B, C, D restent à l'intérieur du cercle.

$f(z)$ est calculée pour ces différentes valeurs et le "quadrant de départ" sera celui correspondant au point où $|f(z)|$ est minimal. En principe, nous pouvons supposer que ce point est, des quatre, le plus proche d'une racine (ce n'est qu'une hypothèse, mais généralement vérifiée).

Les deux autres points initiaux seront la projection du premier sur les axes. Ce choix peut diminuer sensiblement le nombre d'itérations si la racine cherchée est réelle ou imaginaire pure.

Ces trois valeurs z_1, z_2, z_3 sont alors classées par $|f(z_i)|$ décroissants. Le calcul de a'', a', a par (1), (2), (3) peut alors se faire et le processus itératif est enclenché.

3.2. Détails de l'algorithme - Cas général

Nous nous plaçons ici dans le cas où le programme se déroule normalement jusqu'au résultat. Les difficultés et leurs remèdes seront étudiés dans le paragraphe suivant.

$a'' a, a'$ étant calculées par les formules (1), (2), (3), nous comparons $|f(z_i)|_{i=1,2,3}$ et $\left|f\left(\frac{a'}{a''}\right)\right|$. Nous choisissons les trois valeurs pour lesquelles $|f(z)|$ est minimal, celles-ci sont ordonnées en $|f(z)|$ décroissant et deviennent z_1, z_2, z_3 , les nouvelles valeurs de départ pour l'itération suivante.

Après chaque itération $|z_3|$ est testé par rapport à 1.

Si $\begin{cases} \cdot & |z_3| \leq 1, & |f(z_3)| \text{ est comparé à } \epsilon \text{ (précision donnée)} \\ \cdot & |z_3| > 1, \text{ nous formons } \tilde{z} = 1/z_3 \text{ et nous calculons } |g(\tilde{z})| \end{cases}$
sachant que g est le polynôme dont les racines sont inverses de celles de f (polynôme réciproque).

Lorsque ce test ou un de ceux précisés ultérieurement, aura fonctionné, la racine α obtenue est placée dans un tableau.

Un sous-programme de division du polynôme par $(z-\alpha)$ donne les coefficients du nouveau polynôme à étudier.

Immédiatement après, nous testons $\bar{\alpha} = \bar{z}_3$ par rapport à la précision désirée. Si $\bar{\alpha}$ est racine, le polynôme est divisé par $(z-\bar{\alpha})$ et nous cherchons à nouveau si $\bar{\bar{z}}_3 = z_3$ est racine ... ; cette boucle se poursuit jusqu'à ce que le test de précision ne fonctionne plus.

Donc, sans itération, le problème des racines conjuguées et multiples est ainsi, en partie, résolu.

REMARQUE :

Le test sur $\bar{\alpha}$ se fait par rapport à $100 \cdot \epsilon$, afin de ne pas tenir compte dans la mesure du possible, des erreurs inhérentes à la division par $(z - \alpha)$.

Si le degré du polynôme obtenu après division est ≥ 2 , un nouveau R est calculé (R rayon d'un cercle contenant au moins une racine de ce polynôme). Les nouvelles valeurs de départ sont alors calculées et le processus itératif repart.

S'il n'en reste qu'une, la dernière racine est obtenue directement

$$= - \frac{a_1}{a_0}.$$

3.3. Difficultés rencontrées - Remèdes utilisés.

Nous considérons les difficultés dans l'ordre où elles ont été rencontrées lors de l'exécution du programme.

3.3.1. Test sur les dénominateurs de a, a', a''

a, a', a'' , ayant chacune un dénominateur, il est nécessaire de tester ce dernier à chaque itération afin d'éviter une division par 0.

α) Les dénominateurs de a et a' sont respectivement :

$$(z_3 - z_2)(F_2 - F_1) + (z_1 - z_2)(F_3 - F_2)$$

et

$$(z_2 - z_3)(z_1^2 F_1 - z_2^2 F_2) + (z_1 - z_2)(z_3^2 F_3 - z_2^2 F_2)$$

avec $F_i = \frac{f'(z_i)}{f(z_i)}.$

Le cas particulier où l'un des deux dénominateurs est nul sans que les facteurs le composant le soient, sera automatiquement réglé par la transformation indiquée plus loin.

Mais ces deux dénominateurs peuvent s'annuler si :

$$\cdot \quad z_2 = z_3 \Rightarrow F_3 = F_2 \quad \text{et} \quad z_3^2 F_3 = z_2^2 F_2$$

ou

$$\cdot \quad z_1 = z_2 \Rightarrow F_1 = F_2 \quad \text{et} \quad z_1^2 F_1 = z_2^2 F_2 \quad .$$

Ils s'annuleront donc si z_1 ou $z_3 = z_2$.

Nous adopterons donc la même transformation pour les deux. En fait, il suffirait de modifier z_2 , mais pour se prémunir contre le cas z_1, z_2, z_3 très voisins, nous modifierons aussi z_1 .

La transformation faite est proposée en 3.3.2.α).

REMARQUE :

Le cas $z_1 = z_2 = z_3$ est traité ultérieurement, car il ne peut se produire à la lère itération.

β) Le dénominateur de a'' est nul lorsque $f'(z_3) = 0$; il suffit alors de modifier légèrement z_3 et de continuer les itérations.

On prendra (par exemple) $z_3 = z_3 + (0.2 + i0.2)$

3.3.2. Cyclage entre $z_1, z_2, z_3, a, a', a''$.

Le choix fait sur les 6 valeurs $z_1, z_2, z_3, a, a', a''$ peut conduire à un cyclage si, z_1, z_2, z_3 étant les valeurs de départ de l'itération, a, a', a'' calculées sont telles que $\left| f\left(\frac{a}{a''}\right) \right| > |f(z_i)|$.

Le calcul n'a pas alors progressé.

Deux cas conduisent à un tel cyclage :

α) A une certaine itération, z_1, z_2, z_3 sont telles que pour a, a', a'' calculées, $\min \left| f\left(\frac{a}{a''}\right) \right| > \sup_{z_1, z_2, z_3} |f(z_i)|$ (cela peut se produire si les valeurs sont éloignées de la racine).

Pour effacer cette difficulté, il suffit de modifier les valeurs z_1, z_2, z_3 jusqu'à ce que le procédé se mette à converger.

La transformation suivante est utilisée :

$$\begin{cases} z_1 = z_1 + \ell * k * \omega(2+2i) \\ z_2 = z_2 - \ell * k * \omega(1+i) \\ z_3 = z_3 \end{cases}$$

Initialement, $k = 1$, $\ell = 1$.

Si la convergence n'a pas commencé après la première transformation, k augmente d'une unité et ℓ change de signe.

C'est ainsi que l'on a :

- 1ère transformation :

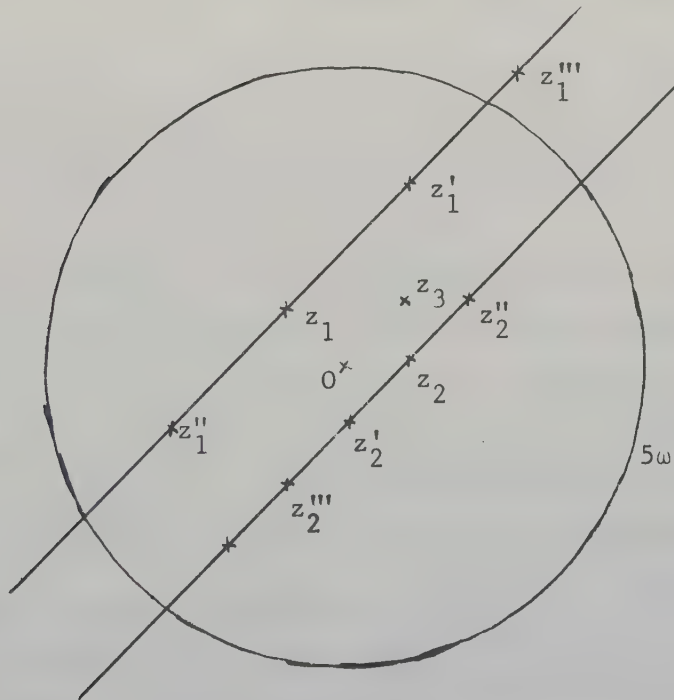
$$\begin{cases} z'_1 = z_1 + \omega(2+2i) \\ z'_2 = z_2 - \omega(1+i) \\ z'_3 = z_3 \end{cases}$$

- Si nécessaire, 2ème transformation :

$$\begin{cases} z''_1 = z'_1 - 2\omega(2+2i) \\ z''_2 = z'_2 + 2\omega(1+i) \\ z''_3 = z'_3 \end{cases}$$

etc ...

Exemple de transformation :



On a donc essayé de choisir différents points dans le cercle qui contient au moins une racine, en alternant les directions de transformation .

Enfin, z_3 n'est pas modifiée puisque c'est la "meilleure" des trois valeurs z_1, z_2, z_3 .

REMARQUE :

. Il est à noter que dans les essais effectués, une seule transformation a été nécessaire pour enclencher le processus et ce, dans de très rares cas.

. C'est cette même transformation qui est employée en 3.3.1α).

β) Une certaine précision est atteinte et a, a', a'' commencent à osciller sans amélioration sur $|f|$.

La précision désirée n'est pas obtenue et cependant la convergence ne progresse plus.

Le calcul pourrait être arrêté là, mais il est difficile de savoir si l'on ne se trouve pas, en fait, dans le cas particulier correspondant à α) avec des valeurs éloignées de la racine. Cette difficulté s'est présentée dans un exemple traité en 4).

Pour éviter cet obstacle, nous opérons de la manière suivante : s'il y a un cyclage, nous testons $|f(z_3)|$ ou $|g(1/z_3)|$ (suivant $|z_3| \gtrless 1$).

Si ce module est $< 1.10^{-j}$, alors z_3 est considérée comme étant racine de $f(z)$ ($j = \frac{i}{2}$ et ≤ 6 , sachant que 10^{-i} est la précision désirée) ; dans le cas contraire, nous faisons la transformation comme en α).

Comme chaque fois qu'il y a oscillation, on prend le risque de s'arrêter avant d'obtenir la meilleure valeur possible.

En fait, nous avons remarqué que, dès que la convergence a débuté, le processus s'accélère et conduit à une des meilleures valeurs que l'on puisse espérer ($|f(z)|$ est alors très proche du minimum qui, éventuellement pourrait être atteint lors des oscillations).

Pour essayer, cependant, d'améliorer ce résultat, nous avons envisagé d'effectuer un certain nombre d'itérations et de conserver la valeur obtenue aux moments des différents cyclages. Il suffirait ensuite de choisir le meilleur résultat.

Sans doute, la précision était elle très légèrement améliorée mais

au prix d'un nombre considérable d'itérations supplémentaires.

Le procédé a été testé et abandonné par la suite, du fait de son coût.

γ) Un problème similaire à β) s'est produit lors d'un essai du polynôme P_{24} .

Les deux tests précédents n'ont pas fonctionné, l'arrêt s'est effectué sur le nombre maximal d'itérations.

z_3 est devenu stationnaire rapidement, dans un voisinage de la racine ; z_1 et z_2 sont alors très légèrement modifiés après chaque itération. La précision désirée n'était pas atteinte et il n'y avait pas cyclage au sens défini en β), puisque z_1 et z_2 progressaient lentement vers des valeurs meilleures.

Nous avons donc ajouté un test supplémentaire.

Si lors de 3 itérations successives, z_3 (c.à.d. la meilleure valeur après choix) n'est pas modifiée et si $|f(z_3)| < 10^{-j}$ (même définition pour j qu'en β) $\Rightarrow$ arrêt ; z_3 est considérée comme étant racine.

Exemple : Soit le polynôme $P_{24} : (z^2+z+2)^4(z^2+z+3)^4$

Le calcul de la 5ème racine a conduit au phénomène ci-dessous :

En 6 itérations, nous avons obtenu :

$$\begin{array}{ll} z_1 = -5.024\ 830\ 615 + i\ 1.663\ 572\ 826 & |f(z_1)| \approx 1.44 \cdot 10^{-7} \\ z_2 = -5.000\ 119\ 702 + i\ 1.658\ 317\ 435 & |f(z_2)| \approx 1 \cdot 10^{-10} \\ z_3 = -5.000\ 152\ 992 + i\ 1.658\ 328\ 203 & |f(z_3)| \approx 1 \cdot 10^{-10} \end{array}$$

Dans les itérations suivantes, seule z_1 est légèrement modifiée, z_2 et z_3 restant stationnaires.

Avec 4 itérations supplémentaires $|f(z_1)|$ passe de $1.44 \cdot 10^{-7}$ à $1.0 \cdot 10^{-7}$. Il n'y a donc pas cyclage au sens de α) et β).

Il faut noter cependant, qu'après un nombre important d'itérations, z_1 se rapprocherait de z_2 et de z_3 donc de la racine.

REMARQUES :

. Quelle que soit la précision demandée, le calcul s'arrêtera donc, en principe, sur une des meilleures valeurs qui puissent être obtenues.

. Le phénomène de cyclage qui nécessite des modifications un peu arbitraires, n'a été rencontré que très rarement lorsque la précision demandée est "normale" (par exemple : $\epsilon < 1.10^{-10}$ en double précision).

. La dernière sécurité prévue est, évidemment, le nombre maximal d'itérations à ne pas dépasser.

Ce test ne devrait en principe, pas servir.

4 - Résultats numériques

Tous les résultats sont en annexe à ce chapitre.

4.1. Polynôme P_{21} proposé par DIMSDALE [12] et repris par [23]

a) Annexes 1.1., 1.2., 1.3. : Variations de c

Nous avons, lors de ces essais, conservé la même précision $\epsilon = 1.10^{-9}$.

Par contre, c (coefficient multiplicateur affecté aux points de départ) a pris les valeurs 0.5, 1, 2 .

Les meilleurs résultats ont été obtenus avec $c = 0.5$ ou $c = 1$. Les racines ont été trouvées par modules croissants, ce qui est important pour la précision (cf. WILKINSON [56]).

Avec $c = 2$, il n'en n'est plus de même et il s'ensuit une perte sensible de précision.

REMARQUE :

Nous pouvons noter que la précision de ces résultats est comparable à celle obtenue par J.G.M. [23] , mais le nombre d'itérations est nettement inférieur (18/50).

b) Annexes 1.2., 1.4., 1.4', 1.4'', 1.4''' : Variations de m

Nous rappelons que m est utilisé dans la détermination de a',

lorsque l'on considère la fonction $\psi(z) = \frac{f(z)}{z^m}$.

Avec $\epsilon = 1.10^{-9}$ $c = 1$, m a pris successivement les valeurs 1, 2, 3, 4, 10.

Nous pouvons simplement remarquer que pour $m > 3$, la précision sur la racine double est améliorée, mais sans qu'une loi paraisse se dégager.

Nous avons pu noter lors d'autres essais, que pour des polynômes à racines multiples, la précision et le nombre d'itérations étaient fonction du paramètre m.

c) Essais supplémentaires avec augmentation de la précision (annexes 1.5. et 1.6.)

Les meilleurs résultats sont obtenus avec $\epsilon = 1.10^{-13}$, $c = 0.5$, $m = 1$.

REMARQUE :

Deux cyclages sont apparus du fait du mauvais conditionnement du polynôme et de la précision importante souhaitée.

4.2. Polynôme du 10ème degré à racines multiples P_{23} proposé par DURAND [13] (cf. annexes 2.1., 2.2., 2.3.)

Nous pouvons constater qu'il n'est pas souhaitable de demander une précision excessive.

Les résultats obtenus par $\epsilon = 1.10^{-11}$ sont meilleurs que ceux trouvés avec $\epsilon = 1.10^{-13}$ et le nombre d'itérations est nettement plus faible (33/72).

En effet, la précision désirée alors, n'est pratiquement jamais atteinte, les arrêts se font dès que les valeurs obtenues sont stationnaires. Aucune racine ne peut être trouvée directement (par le calcul de $\bar{\alpha}$), d'où de nouvelles itérations et par conséquent introduction d'erreurs supplémentaires.

REMARQUE :

Nous pouvons cependant noter que les résultats sont sensiblement moins bons que ceux obtenus par NEWTON-P (surtout après correction), mais sont largement supérieurs à ceux donnés par NEWTON simple.

4.3. Polynôme du 16ème degré mal conditionné P₃₅

(Les résultats sont en annexes 3.1., 3.2., 3.3., 3.4.)

Les trois premiers essais sont effectués avec $m = 1$ et $\epsilon = 1.10^{-9}$ constants et le coefficient c prenant les valeurs 0.5, 1, 2 .

Les meilleurs résultats ont été obtenus avec $c = \underline{2}$, les valeurs initiales étant plus proches des racines cherchées.

(Le nombre moyen d'itérations est égal à 45 contre 150 pour [23]).

Enfin, pour avoir un grand nombre de racines, avec une précision importante, on peut envisager de faire plusieurs passages avec des coefficients c différents à chaque fois. Il suffit ensuite de choisir les meilleurs résultats (le choix peut se faire sur la valeur du polynôme associée à la racine).

De la même façon et dans le même but, on peut faire varier le paramètre m .

L'essai avec $\epsilon = 1.10^{-12}$, $c = 2$, $m = 1$ améliorent nettement les résultats précédents avec peu d'itérations supplémentaires.

REMARQUE :

Lors de deux essais nous avons rencontré le phénomène de cyclage défini en 3.3.2. Un message indicatif a été imprimé.

4.4. Polynôme du 16ème degré à racines imaginaires multiples voisines P₂₄

(Résultats en annexes 4.1., 4.2., 4.3., 4.4.)

Nous pouvons faire trois remarques :

- . les résultats sont très différents suivant que l'on a pris $c = 1$ ou $c = 2$, d'où l'importance de ce coefficient
- . comme précédemment, la précision trop forte conduit à des résultats moins bons
- . le test permettant de savoir sans itération si $\bar{\alpha}$ est racine est très important, 10 racines sur 16 ont pu ainsi être trouvées directement, sauf dans le cas d'une précision demandée trop forte.

Le phénomène étudié en 3.3.2. γ) a été rencontré dans cet exemple et a donné lieu à un message et à l'arrêt prévu.

Le cyclage défini en 3.3.2. β) a été aussi trouvé.

(35 itérations en moyenne ont été nécessaires contre 220 pour [23]).

4.5. Polynôme du 16ème degré particulièrement mal conditionné P_{34}

La caractéristique de ce polynôme est que toutes les racines sont voisines avec un module nettement inférieur à 1.

Les résultats sont fournis en annexe (5.1. à 5.4.).

Ils ont montré que lorsque toutes les racines sont voisines de 0, il semble y avoir intérêt à violer la règle d'obtention des racines par ordre croissant.

En effet, de nombreux chiffres significatifs peuvent être faux, sans que pour autant la valeur correspondante du polynôme soit modifiée. La précision peut être atteinte, donc pour des valeurs relativement différentes d'une même racine. Mais au cours des divisions successives, un phénomène d'accumulation d'erreurs peut se produire et devenir important par rapport à la valeur des racines.

C'est ainsi que les meilleurs résultats ont été obtenus pour $c = 2$ et les moins bons pour $c = 0.5$.

De plus le choix de $m = 2$ semble préférable à celui de $m = 1$.

4.6. Autres polynômes

Des polynômes apparemment bien conditionnés ont été testés, les résultats correspondants sont en annexe du dernier chapitre.

V - Conclusion

La méthode décrite est intéressante, en particulier dans le cas de polynômes "difficiles" ou mal conditionnés.

Elle est applicable en principe quel que soit le polynôme proposé à coefficients réels ou complexes. Elle est d'un ordre de convergence assez élevé pour une méthode générale.

Pour une racine simple, il est égal au moins à 1.84 et la possibilité de choix, à chaque itération, l'augmente notablement.

Dans le cas de racines multiples, la méthode d'interpolation appliquée à $\frac{f(z)}{f'(z)}$ est aussi d'ordre de convergence = 1.84, les deux autres devenant linéaires.

Les calculs ne sont pas très importants. Pour a et a' les mêmes résultats de calculs sont utilisés.

Le nombre réduit de cyclages trouvés lors des essais, justifie le choix des 3 valeurs parmi $z_1, z_2, z_3, a, a', a''$.

Un tel choix améliore considérablement la rapidité de convergence par rapport à celui fait par [23] qui prennent à chaque itération $z_1 = z_2, z_2 = z_3$ et parmi a, a', a'' , la valeur la plus proche de z_3 (précédent).

Le choix des points de départ semble généralement apporter quelques gains sur le nombre d'itérations, en outre, il a l'avantage de pouvoir être modifié par un facteur c , ce qui peut être intéressant lorsque l'on connaît une approximation du module des racines cherchées.

De même, comme il a été précédemment remarqué, la possibilité de choix sur c et sur le paramètre m permet (en plusieurs essais toutefois), d'accroître considérablement la précision des résultats.

La valeur choisie pour la précision (ϵ) n'est pas fondamentale. Si ϵ est trop petit, le polynôme fournit quand même une des meilleures solutions possibles. Cependant, il est souhaitable de demander une précision "normale", (10^{-10} par exemple lorsqu'on travaille avec 16 chiffres significatifs) ce qui évite en principe tous les cyclages.

En définitive, cette méthode est efficace pour tous les polynômes, mais étant donné la longueur du programme, il est préférable de l'utiliser pour des polynômes à degré assez élevé et mal conditionnés (MULLER est sans doute préférable pour des polynômes de haut degré et dont les racines sont bien séparées et NEWTON, BAIRSTOW et surtout LAGUERRE pour les polynômes de bas degré bien conditionnés).

ANNEXES AU CHAPITRE IV.C.4.

1.

1.1. $c = 0.5$ $m = 1$ $\epsilon = 1.10^{-9}$

1	0.9868411346782460D-01	0.4550898605622161D+00
2	0.99999999999999682D+00	0.4817308881579227D-13
3	0.1999996987364003D+01	0.2651148736387571D-06
4	0.2000003012617998D+01	-0.2651369541903607D-06
5	-0.2098684113449794D+01	-0.4550898605401837D+00

en 18 itérations

1.2. $c = 1$ $m = 1$ $\epsilon = 1.10^{-9}$

1	0.9868411346781170D-01	0.4550898605622297D+00
2	0.9999999999999935D+00	-0.5858777769555622D-14
3	0.1999984663772552D+01	-0.9292923077538930D-06
4	0.2000015336176560D+01	0.9292936337141425D-06
5	-0.2098684113416917D+01	-0.4550898605635498D+00

en 17 itérations

1.3. $c = 2$ $m = 1$ $\epsilon = 1.10^{-9}$

1	0.9868411335701330D-01	0.4550898604450094D+00
2	0.1000000000388985D+01	0.2605802221870817D-09
3	0.1999990781320743D+01	0.2609899520053700D-05
4	-0.2098684113481835D+01	-0.4550898605902152D+00
5	0.2000009218415094D+01	-0.2610014894488533D-05

en 14 itérations

1.4. $c = 1$ $m = 2$ $\epsilon = 1.10^{-9}$

1	0.9868411346781200D-01	0.4550898605622255D+00
2	0.9999999999999952D+00	0.6249868832188576D-14
3	0.2000002798122150D+01	-0.1819798678683211D-05
4	0.1999997201876869D+01	0.1819801523835204D-05
5	-0.2098684113466826D+01	-0.4550898605650769D+00

en 18 itérations

1.4'. $c = 1$ $m = 3$ $\epsilon = 1.10^{-9}$

1	0.9868411346780740D-01	0.4550898605622225D+00
2	0.9999999978926350D+00	0.1387234859319755D-09
3	0.1999991773033313D+01	0.2509897351024631D-04
4	0.2000008228710889D+01	-0.2509892665362228D-04
5	-0.2098684113104645D+01	-0.4550898607478026D+00

en 19 itérations

1.4". $c = 1$ $m = 4$ $\epsilon = 1.10^{-9}$

1	0.9868411346779760D-01	0.4550898605622234D+00
2	0.1000000000000037D+01	0.3177638370917224D-14
3	0.2000000001412284D+01	-0.1988543998133237D-08
4	0.2000000001412284D+01	0.1988543998133237D-08
5	-0.2098684116292404D+01	-0.4550898605622265D+00

en 18 itérations

1.4''' $c = 1$ $m = 10$ $\epsilon = 1.10^{-9}$

1	0.9868411346787400D-01	0.4550898605622557D+00
2	0.9999999999996691D+00	-0.4044452489929128D-12
3	0.1999999993090859D+01	-0.2129673471735830D-06
4	0.1999999993090859D+01	0.2129673471735830D-06
5	-0.2098684099649262D+01	-0.4550898605618513D+00

en 13 itérations

1.5. $c = 0.5$ $m = 1$ $\epsilon = 1.10^{-11}$

1	0.9868411346782460D-01	0.4550898605622161D+00
2	0.9999999999999682D+00	0.4817308881579227D-13
3	0.1999999987364003D+01	0.2651148736387571D-06
4	0.2000003012633885D+01	-0.2651142795255885D-06
5	-0.2098684113465680D+01	-0.4550898605628584D+00

en 19 itérations

1.6. $c = 0.5$ $m = 1$ $\epsilon = 1.10^{-13}$

1	0.9868411346782460D-01	0.4550898605622161D+00
2	0.9999999999999682D+00	0.4817308881579227D-13
3	0.2000000003336668D+01	-0.6383475724053690D-08
4	0.1999999996663347D+01	0.6383443878945277D-08
5	-0.2098684113467808D+01	-0.4550898605622324D+00

en 20 itérations

—

2.

2.1. $c = 1$ $m = 1$ $\epsilon = 1.10^{-10}$

1	0.1000017150647533D+01	0.2564642541639378D-04
2	0.1000017150647533D+01-0.	2564042541639378D-04
3	0.9999830882581414D+00-0.	1375032961691610D-06
4	0.1999994818508177D+01-0.	1563218161332043D-05
5	0.1999994818508177D+01	0.1563218161332043D-05
6	0.9999826102974467D+00	0.1375031428143869D-06
7	0.2999999930136154D+01	0.6014225163620428D-06
8	0.2999999930136154D+01-0.	6014225163620428D-06
9	0.2000010433076084D+01	0.1971802440318360D-12
10	0.40000000069784596D+01-0.	4382546992080048D-13

en 27 itérations

2.2. $c = 1$ $m = 1$ $\epsilon = 1.10^{-11}$

1	0.1000017150647533D+01	0.2564642541639378D-04
2	0.1000017150647533D+01-0.	2564642541639378D-04
3	0.9999830882581414D+00-0.	1375032961691610D-06
4	0.1999994818508177D+01-0.	1563218161332043D-05
5	0.1999994818508177D+01	0.1563218161332043D-05
6	0.9999826102974467D+00	0.1375031428143869D-06
7	0.2999999930136154D+01	0.6014225163620428D-06
8	0.2000010363375430D+01-0.	2548816125064017D-12
9	0.30000000069536732D+01-0.	6014216961100585D-06
10	0.40000000000084672D+01-0.	4120155976077827D-12

en 33 itérations

2.3. $c = 1$ $m = 1$ $\epsilon = 1.10^{-14}$

1	0.1000017150647533D+01	0.2564642541639378D-04
2	0.1000063985154023D+01-0.	1172832537408652D-04
3	0.9999516971246105D+00-0.	1261949956259186D-04
4	0.1997260272496968D+01-0.	9094058241349902D-04
5	0.9999671818984949D+00-0.	1297119893285919D-05
6	0.2001448740363450D+01-0.	2329357450943823D-02
7	0.3000005071655149D+01-0.	1013834528664516D-03
8	0.2001290940969225D+01	0.2420293419522029D-02
9	0.2999994959123134D+01	0.1013865292475675D-03
10	0.40000000000567410D+01	0.5686774722253444D-10

en 72 itérations

3.1. $c = 0.5$ $m = 1$ $\epsilon = 1.10^{-9}$

1	-0.2935045291260652D+00	0.1434992968066534D+00
2	-0.2935045291260652D+00-0.1434992968066534D+00	
3	-0.2244700584466439D+00-0.4509279582721341D+00	
4	-0.2244700584466439D+00 0.4509279582721341D+00	
5	-0.9003999145505240D-01 0.10611920579052R3D+01	
6	-0.9003999145505240D-01-0.1061192057905293D+01	
7	-0.2566871505342779D-01 0.1474377152769646D+01	
8	-0.2566871505342779D-01-0.1474377152769646D+01	
R	-0.1049353200655354D-01-0.1596295463116320D+01	
10	-0.1049353200655354D-01 0.1596295463116320D+01	
11	-0.2489213610058824D-02 0.1667120380396007D+01	
12	-0.2489213610058824D-02-0.1667120380396007D+01	
13	-0.5086443801868541D-01-0.1296911287380964D+01	
14	-0.5086443801868541D-01 0.1296911287380964D+01	
15	-0.1476237770120294D+00-0.7717571983147544D+00	
16	-0.1476237770120294D+00 0.7717571983147544D+00	

en 46 itérations

3.2. $c = 1$ $m = 1$ $\epsilon = 1.10^{-9}$

1	-0.2935045292343850D+00	0.1434992969275004D+00
2	-0.2935045292343850D+00-0.1434992969275004D+00	
3	-0.2244700578388235D+00 0.4509279581879756D+00	
4	-0.2244700578388235D+00-0.4509279581879756D+00	
5	-0.1476237803505873D+00 0.7717572013569537D+00	
6	-0.1476237803505873D+00-0.7717572013569537D+00	
7	-0.5086443582398232D-01 0.1296911279870085D+01	
8	-0.5086443582398232D-01-0.1296911279870085D+01	
9	-0.9003998854591430D-01-0.1061192059301321D+01	
10	-0.9003998854591430D-01 0.1061192059301321D+01	
11	-0.1049354627185307D-01 0.1596295505965139D+01	
12	-0.1049354627185307D-01-0.1596295505965139D+01	
13	-0.2566871167373921D-01-0.1474377138781147D+01	
14	-0.2566871167373921D-01 0.1474377138781147D+01	
15	-0.2489204990175226D-02 0.1667120355332014D+01	
16	-0.2489204990175226D-02-0.1667120355332014D+01	

en 40 itérations

3.3. $c = 2$ $m = 1$ $\epsilon = 1.10^{-9}$

1	-0.2935045292343849D+00-0.1434992969275003D+00	
2	-0.2935045292343849D+00 0.1434992969275003D+00	
3	-0.1476237802266771D+00 0.7717572010638524D+00	
4	-0.1476237802266771D+00-0.7717572010638524D+00	
5	-0.2244700578790212D+00 0.4509279583014902D+00	
6	-0.2244700578790212D+00-0.4509279583014902D+00	
7	-0.5086443560493858D-01 0.1296911279073718D+01	
8	-0.5086443560493858D-01-0.1296911279073718D+01	
9	-0.9003998868868360D-01 0.1061192059793759D+01	
10	-0.9003998868868360D-01-0.1061192059793759D+01	
11	-0.1049354913944903D-01-0.1596295494993674D+01	
12	-0.1049354913944903D-01 0.1596295494993674D+01	
13	-0.2566871100793822D-01 0.1474377144150988D+01	
14	-0.2566871100793822D-01-0.1474377144150988D+01	
15	-0.2489202966635412D-02 0.1667120361514151D+01	
16	-0.2489202966635412D-02-0.1667120361514151D+01	

en 44 itérations

.../...

3.4. $c = 2$ $m = 1$ $\epsilon = 1.10^{-12}$

1	-0.2935045292343849D+00	-0.1434992969275003D+00
2	-0.2935045292343849D+00	0.1434992969275003D+00
3	-0.1476237802266771D+00	0.7717572010638524D+00
4	-0.1476237802266771D+00	-0.7717572010638524D+00
5	-0.2244700578790212D+00	0.4509279583014909D+00
6	-0.2244700578790212D+00	-0.4509279583014909D+00
7	-0.5086443560493858D-01	0.1296911279073718D+01
8	-0.5086443560493858D-01	-0.1296911279073718D+01
9	-0.9003998874142580D-01	0.1061192059843121D+01
10	-0.9003998874142580D-01	-0.1061192059843121D+01
11	-0.1049355009635045D-01	-0.1596295495556135D+01
12	-0.1049355009635045D-01	0.1596295495556135D+01
13	-0.2566871050048410D-01	0.1474377143825357D+01
14	-0.2566871050048410D-01	-0.1474377143825357D+01
15	-0.2489202445234241D-02	0.1667120361216741D+01
16	-0.2489202445234241D-02	-0.1667120361216741D+01

en 46 itérations

4.

4.1. $c = 1$ $m = 1$ $\epsilon = 1.10^{-12}$

1	-0.5012852542767606D+00	0.1323237136335431D+01
2	-0.5012852542767606D+00	-0.1323237136335431D+01
3	-0.5008943914142943D+00	-0.1657220357457245D+01
4	-0.5008943914142943D+00	0.1657220357457245D+01
5	-0.4987231029518046D+00	-0.1322512006860141D+01
6	-0.4987231029518046D+00	0.1322512006860141D+01
7	-0.4991152260861346D+00	0.1659400673396540D+01
8	-0.4991152260861346D+00	-0.1659400673396540D+01
9	-0.5003584619108155D+00	-0.1321595680093294D+01
10	-0.5003584619108155D+00	0.1321595680093294D+01
11	-0.4989050199041739D+00	0.1657424770436012D+01
12	-0.4989050199041739D+00	-0.1657424770436012D+01
13	-0.4996331797209641D+00	-0.1324157797829366D+01
14	-0.4996331797209641D+00	0.1324157797829366D+01
15	-0.5010853637350632D+00	0.1659203780431777D+01
16	-0.5010853637350632D+00	-0.1659203780431777D+01

en 35 itérations

4.2. $c = 2$ $m = 1$ $\epsilon = 1.10^{-11}$

1	-0.4999974120679045D+00	0.1322895659182456D+01
2	-0.4999974120679045D+00	-0.1322895659182456D+01
3	-0.4999974120679045D+00	0.1322895659182456D+01
4	-0.4999974120679045D+00	-0.1322895659182456D+01
5	-0.4999974120679045D+00	0.1322895659182456D+01
6	-0.4999974120679045D+00	-0.1322895659182456D+01
7	-0.5000257703028193D+00	0.1658972555202378D+01
8	-0.5000257703028193D+00	-0.1658972555202378D+01
9	-0.5000257703028193D+00	0.1658972555202378D+01
10	-0.5000257703028193D+00	-0.1658972555202378D+01
11	-0.5000077590133493D+00	0.1322815639443715D+01
12	-0.5000077590133493D+00	-0.1322815639443715D+01
13	-0.5009096475583106D+00	-0.1657615336943682D+01
14	-0.5009096475583106D+00	0.1657615336943682D+01
15	-0.4990388166180662D+00	0.1657689138056618D+01
16	-0.4990388166180662D+00	-0.1657689138056618D+01

en 31 itérations

4.3. $c = 2$ $m = 1$ $\epsilon = 1.10^{-12}$

```

1 -0.4999974120679045D+00 0.1322895659182456D+01
2 -0.4999974120679045D+00-0.1322895659182456D+01
3 -0.4999974120679045D+00 0.1322895659182456D+01
4 -0.4999974120679045D+00-0.1322895659182456D+01
5 -0.5000152992052854D+00 0.1658328203763221D+01
6 -0.5000152992052854D+00-0.1658328203763221D+01
7 -0.5000152992052854D+00 0.1658328203763221D+01
8 -0.5000152992052854D+00-0.1658328203763221D+01
9 -0.4999742964548139D+00-0.1322851996510813D+01
10 -0.4999742964548139D+00 0.1322851996510813D+01
11 -0.5000308794082423D+00 0.1322859307253277D+01
12 -0.5000308794082423D+00-0.1322859307253277D+01
13 -0.5000070603992460D+00-0.1658274948578303D+01
14 -0.5000070603992460D+00 0.1658274948578303D+01
15 -0.4999623411913174D+00 0.1658318224606323D+01
16 -0.4999623411913174D+00-0.1658318224606323D+01

```

en 35 itérations

4.4. $c = 2$ $m = 1$ $\epsilon = 1.10^{-15}$

```

1 -0.4999974120679045D+00 0.1322895659182456D+01
2 -0.4999974120679045D+00-0.1322895659182456D+01
3 -0.5000058650016868D+00-0.1322809259222813D+01
4 -0.4998791842979059D+00 0.1658484209488322D+01
5 -0.4998791842979059D+00-0.1658484209488322D+01
6 -0.4998217467871609D+00 0.1658214224748099D+01
7 -0.4999983492699841D+00 0.1322866447769412D+01
8 -0.5000248228144537D+00-0.1658268043675063D+01
9 -0.4999862457707873D+00 0.1322868733297322D+01
10 -0.4999955334738865D+00-0.1322895300300079D+01
11 -0.5000179926193577D+00 0.1322871780871389D+01
12 -0.4999128787344838D+00-0.1658146348454900D+01
13 -0.5000011870972258D+00-0.1322902417820396D+01
14 -0.5001488284798705D+00 0.1658249175556221D+01
15 -0.5001502449637248D+00 0.1658301978970824D+01
16 -0.5001831122557555D+00-0.1658350971740017D+01

```


5.

5.1. $c = 0.5$ $m = 1$ $\epsilon = 1.10^{-11}$

```
1 -0.4913968741712254D-03 0.3041824140777791D+00
2 -0.4913968741712254D-03-0.3041824140777791D+00
3 -0.4533679398345123D-04-0.3106628664848194D+00
4 -0.4533679398345123D-04 0.3106628664848194D+00
5 -0.1869499532929877D-01 0.2530456818904665D+00
6 -0.1869499532929877D-01-0.2530456818904665D+00
7 -0.1431419986500654D-03-0.3086118840716723D+00
8 -0.1431419986500654D-03 0.3086118840716723D+00
9 -0.1672349737974257D-05 0.3121978895451287D+00
10 -0.1672349737974257D-05-0.3121978895451287D+00
11 -0.1324472469907128D+00-0.1360055079515847D+00
12 -0.1324472469907128D+00 0.1360055079515847D+00
13 -0.2320946652923003D-02 0.2925837443418508D+00
14 -0.2320946652923003D-02-0.2925837443418508D+00
15 -0.1756718785906928D-04 0.3116945847507890D+00
16 -0.1756718785906928D-04-0.3116945847507890D+00
```

en 71 itérations

5.2. $c = 2$ $m = 1$ $\epsilon = 1.10^{-11}$

```
1 -0.1324472469902462D+00 0.1360055079513776D+00
2 -0.1324472469902462D+00-0.1360055079513776D+00
3 -0.4914154737838649D-03-0.3041824736582760D+00
4 -0.4914154737838649D-03 0.3041824736582760D+00
5 -0.1819629962529727D-04-0.3116893851611839D+00
6 -0.1819629962529727D-04 0.3116893851611839D+00
7 -0.2320945426456926D-02-0.2925837438575370D+00
8 -0.2320945426456926D-02 0.2925837438575370D+00
9 -0.4509958501633525D-04 0.3106660515701960D+00
10 -0.4509958501633525D-04-0.3106660515701960D+00
11 -0.1869499533752950D-01-0.2530456818776434D+00
12 -0.1869499533752950D-01 0.2530456818776434D+00
13 -0.1292631247501464D-05-0.3122006032329953D+00
14 -0.1292631247501464D-05 0.3122006032329953D+00
15 -0.1431124334308497D-03-0.3086111258044820D+00
16 -0.1431124334308497D-03 0.3086111258044820D+00
```

en 50 itérations

.../...

5.3. $c = 2$ $m = 1$ $\epsilon = 1.10^{-13}$

1	-0.1324472469902462D+00	0.1360055079513776D+00
2	-0.1324472469902462D+00	-0.1360055079513776D+00
3	-0.4914154737838649D-03	-0.3041824736582760D+00
4	-0.4914154737838649D-03	0.3041824736582760D+00
5	-0.1875134085051962D-04	-0.3116911314400202D+00
6	-0.1875134085051962D-04	0.3116911314400202D+00
7	-0.2320944879821459D-02	-0.2925837431607952D+00
8	-0.2320944879821459D-02	0.2925837431607952D+00
9	-0.4478811620058442D-04	0.3106651128199449D+00
10	-0.4478811620058442D-04	-0.3106651128199449D+00
11	-0.1869499534829699D-01	-0.2530456818809221D+00
12	-0.1869499534829699D-01	0.2530456818809221D+00
13	-0.9897386171684924D-06	-0.3121996402756056D+00
14	-0.9897386171684924D-06	0.3121996402756056D+00
15	-0.1431722895196888D-03	0.3086112819269464D+00
16	-0.1431722895196888D-03	-0.3086112819269464D+00

en 52 itérations

5.4. $c = 2$ $m = 2$ $\epsilon = 1.10^{-13}$

1	-0.1324472469902462D+00	0.1360055079513776D+00
2	-0.1324472469902462D+00	-0.1360055079513776D+00
3	-0.4914445853298545D-03	0.3041823869400799D+00
4	-0.4914445853298545D-03	-0.3041823869400799D+00
5	-0.4666700183578642D-04	-0.3106613570964334D+00
6	-0.4666700183578642D-04	0.3106613570964334D+00
7	-0.2320944717001338D-02	0.2925837450926574D+00
8	-0.2320944717001338D-02	-0.2925837450926574D+00
9	-0.2650316996011827D-05	-0.3121965029554198D+00
10	-0.2650316996011827D-05	0.3121965029554198D+00
11	-0.1869499534550251D-01	0.2530456818773660D+00
12	-0.1869499534550251D-01	-0.2530456818773660D+00
13	-0.1560219225967211D-04	-0.3116971630093885D+00
14	-0.1560219225967211D-04	0.3116971630093885D+00
15	-0.1427530281650770D-03	0.3086122281911656D+00
16	-0.1427530281650770D-03	-0.3086122281911656D+00

en 55 itérations

- D -

Méthodes de résolution basées
sur l'interpolation

1 - Introduction

Nous nous proposons de résoudre les équations polynômiales $f(z) = 0$ à l'aide d'approximations rationnelles de la forme

$$y = \frac{z - a}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}$$

De nombreux auteurs ont étudié ce problème, en particulier OSTROWSKI [41], TORNHEIM [48], TRAUB [50], JARRATT [24]...

Suivant la détermination des différents paramètres, nous trouverons des formules différentes.

Plus m est grand, plus évidemment, les méthodes deviennent compliquées, c'est pourquoi nous étudierons seulement les approximations de la forme

$$y = \frac{z - a}{bz + c} \quad \text{et} \quad y = \frac{z - a}{bz^2 + cz + d}.$$

Nous donnerons aussi l'ordre de convergence pour la méthode générale.

2 - Approximation par fraction linéaire

2.1. Interpolation par trois points distincts

L'étude en a été faite par JARRATT [23] et a été rappelée dans le chapitre IV.C.. Trois points de départ sont nécessaires au démarrage des itérations. La formule obtenue était la suivante :

$$z_{n+1} = z_n + \frac{(z_n - z_{n-1})(z_n - z_{n-2})f_n(f_{n-1} - f_{n-2})}{(z_n - z_{n-1})(f_{n-2} - f_n)f_{n-1} + (z_n - z_{n-2})(f_n - f_{n-1})f_{n-2}}$$

où $f_n = f(z_n)$.

L'ordre de convergence est de 1.84 pour une racine simple.

Pour une racine multiple, la convergence devient linéaire $\epsilon_{n+1} \approx 0.6\epsilon_n$.

Pour améliorer ce dernier résultat, nous avons appliqué la formule précédente non pas à $f(z) = 0$ mais à $\frac{1}{F(z)} = \frac{f(z)}{f'(z)}$, ce qui assurait un ordre de convergence = 1.84 dans tous les cas.

La formule est alors :

$$z_{n+1} = z_n + \frac{(z_{n-1} - z_n)(z_{n-2} - z_n)(F_{n-1} - F_{n-2})}{(z_{n-1} - z_n)(F_n - F_{n-2}) + (z_{n-2} - z_n)(F_{n-1} - F_n)}$$

$$\text{avec } F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

2.2. Interpolation par trois points dont deux coïncident

2.2.1. Formule

Soit à résoudre $f(z) = 0$,

Nous approchons $f(z)$ par $y = \frac{z-a}{bz+c}$. L'interpolation se fait en trois points dont deux confondus z_{n-1} , z_n , z_n .

Le démarrage des itérations se fait donc avec deux valeurs initiales.

Nous supposons que nous connaissons $f(z_{n-1})$, $f(z_n)$ et $f'(z_n)$.

Pour faciliter les calculs, posons :

$$\phi = z - z_n.$$

$$(1) \text{ devient } y = \frac{\phi - \alpha}{\beta\phi + \gamma}$$

$$\text{ou encore } \alpha + \beta\phi y + \gamma y = \phi \quad (2)$$

Par dérivation par rapport à ϕ , nous obtenons :

$$\beta(y + \phi y') + \gamma y' = 1 \quad (3)$$

(2) et (3) doivent vérifier par hypothèse :

$$\begin{cases} y(z_{n-1}) = f(z_{n-1}) \\ y(z_n) = f(z_n) \\ y'(z_n) = f'(z_n) \end{cases} \quad \text{avec } \phi_n = 0$$

D'où le système :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma f_n = 0 \\ \alpha + \beta\phi_{n-1}f_{n-1} + \gamma f_{n-1} = \phi_{n-1} \\ 0 + \beta f_n + \gamma f'_n = 1 \end{cases}$$

Nous cherchons α ce qui nous donnera une valeur approchée de ϕ_n que nous appellerons ϕ_{n+1}

$$\Rightarrow \phi_{n+1} = \frac{f_n [f_n \phi_{n-1} - \phi_{n-1} f_{n-1}]}{\phi_{n-1} f_{n-1} f'_n + f_n^2 - f_n f_{n-1}}$$

$$\text{d'où (I) } z_{n+1} = z_n + \frac{(z_{n-1} - z_n) [f_n^2 - f_n f_{n-1}]}{(z_{n-1} - z_n) f_{n-1} f'_n + f_n^2 - f_n f_{n-1}}$$

2.2.2. Convergence - Coefficient d'efficacité

OSTROWSKI [41] a montré que l'ordre d'une telle méthode est de 2.414.

Il est à noter qu'il a utilisé la dérivée sur z_{n-1} et non pas sur z_n , ce qui semble compliquer la formule définitive.

Le coefficient d'efficacité, défini en 1.3. est égal à :

$$E = 2.414^{1/3} \approx 1.34$$

REMARQUE :

Dans le même ordre d'idée, nous sommes tentés de faire intervenir la dérivée seconde, c'est-à-dire faire une interpolations par trois points coïncidants.

En reprenant un calcul identique au précédent, nous obtenons :

$$z_{n+1} = z_n + \frac{2f(z_n) f'(z_n)}{f(z_n)f''(z_n)-2f'^2(z_n)}$$

ou encore $z_{n+1} = z_n - \frac{ff'}{f'^2 - \frac{1}{2}ff''}$ ce qui est la formule de Halley

(voir le chapitre III.A.)

3 - Interpolation par quatre points.

Il est alors nécessaire de faire intervenir un paramètre supplémentaire. Nous écrirons la fraction rationnelle d'interpolation sous la forme :

$$(4) \quad y = \frac{z - a}{bz^2 + cz + d}$$

3.1. Interpolation par quatre points dont deux sont confondus

L'étude a été faite par JARRATT [19] .

La formule itérative trouvée est la suivante :

$$(II) \quad z_{n+1} = z_n - \frac{(z_n - z_{n-1})f_n[f_{n-1}(f_n - f_{n-1}) - (z_n - z_{n-1})f_n f'_{n-1}]}{2f_n f_{n-1}(f_n - f_{n-1}) - (z_n - z_{n-1})(f_n^2 f'_{n-1} + f_{n-1}^2 f'_n)}$$

Deux points de départ sont donc nécessaires au démarrage des itérations.

Si $\varepsilon_n = z_n - \alpha$ on a :

$$\varepsilon_{n+1} = K \varepsilon_n^2 \varepsilon_{n-1}^2 [1 + \mathcal{O}(\hat{\varepsilon})] \quad \hat{\varepsilon} = \sup (|\varepsilon_n|, |\varepsilon_{n-1}|),$$

avec $K = \frac{c_4}{c_1} - 2 \frac{c_2 c_3}{c_1^2} + \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^3$ sachant que $c_i = \frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!}$

L'ordre de convergence est alors de $1 + \sqrt[4]{3} = 2.732$, d'où l'indice d'efficacité = $2.732^{1/4} \approx 1.286$. Par contre, la présence d'une racine multiple affecte particulièrement la convergence.

Pour une racine double, on a :

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n \cdot \varepsilon_{n-1}}{2(\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1})} [1 + \mathcal{O}(\hat{\varepsilon})]$$

c'est-à-dire que : $\varepsilon_{n+1} \approx 0.36 \varepsilon_n$

La convergence est linéaire au voisinage d'une racine, il faut donc trois itérations pour gagner un chiffre significatif. Ce phénomène nous a conduit à l'étude faite au paragraphe 5.

3.2. Remarques

L'interpolation envisagée en (4) aurait pu se faire différemment :

- a) Avec 4 points distincts ou avec 3 points dont deux coïncident, mais cela aurait donné des formules très compliquées, nécessitant, respectivement 4 ou 3 valeurs initiales pour faire démarrer le processus itératif.
- b) Avec 4 points dont 3 coïncident, ce qui aurait fait intervenir des dérivées secondes, donc aurait affecté considérablement l'efficacité d'une telle formule.
- c) Avec 4 points coïncidents. Le calcul de f''' aurait été nécessaire ce qui augmenterait fortement la longueur et donc le temps de calcul.

4 - Généralisation de la méthode des fractions rationnelles

Plus généralement, nous pouvons considérer la fraction rationnelle :

$$y = \frac{z - a}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + b_{m-2} z^{m-2} + \dots + b_0}$$

a) Si l'on ne fait intervenir que la valeur de la fonction en certains points, sans aucune dérivée, il faudra interpoler sur $(m+2)$ points.

Une généralisation des résultats précédents conduirait à une erreur ε_{n+1} donnée par :

$$\varepsilon_{n+1} = K \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} \dots \varepsilon_{n-m-1}$$

$$\text{Log } \varepsilon_{n+1} = \text{Log } \varepsilon_n + \dots + \text{Log } \varepsilon_{n-m-1} = \text{Log } k$$

Cette équation aux différences a pour solution :

$$\text{Log } \varepsilon_n = A t_1^n + B t_2^n \dots + \frac{1}{2} \text{Log } k$$

avec $t_1, t_2, \dots, t_{m+2}$ solutions de l'équation :

$$t^{m+2} = t^{m+1} + \dots + t + 1$$

MULLER [38] en a fait l'étude .

Pour m donné, cette équation a une racine t_1 entre 1 et 2, les autres étant à l'intérieur du cercle unité.

$$\text{Donc, quand } n \rightarrow \infty \quad t_{2,3,\dots,m+2}^n \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \text{Log } \varepsilon_n \approx A t_1^n - \frac{1}{2} \text{Log } k$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{n+1} \approx k^{\frac{t_1^n - 1}{2}} \times \varepsilon_n^{t_1}$$

t_1 est l'ordre de convergence.

Il est tel que lorsque m croît, il tend vers 2.

On a par exemple pour :

$m = 1$	$t_1 = 1.84$	cas de fraction linéaire
$m = 2$	$t_1 = 1.928$	cas 3.2.a)
$m = 3$	$t_1 = 1.97$	
$m = 4$	$t_1 = 1.98$	

Nous pouvons constater que l'ordre de convergence augmente très peu lorsque le nombre de points d'interpolation croît.

De toutes façons, pour les racines multiples la convergence est linéaire.

b) Il est aussi possible de généraliser en faisant intervenir fonction et dérivée première en chaque point. L'interpolation se fait alors sur $(\frac{m}{2} + 1)$ points.

On arrive alors à une erreur de la forme :

$$\epsilon_{n+1} = K \epsilon_n^2 \epsilon_{n-1}^2 \dots \epsilon_{n-\frac{m}{2}}^2$$

Dans ce cas, une racine t_1 , de l'équation caractéristique tend vers 3 quand m croît.

C'est ainsi que l'on a pour :

$m = 1$	$t_1 = 2.73$	(cf. 3.1.)
$m = 2$	$t_1 = 2.92$	
$m = 3$	$t_1 = 2.974\dots$	

REMARQUE :

TRAUB [50] donne un tableau d'ordre de convergence dans le cas où interviennent aussi f'' puis f''' etc ...

5 - Application des méthodes précédentes à $F(z) = \frac{f(z)}{f'(z)}$

5.1. Nouvelles formules

En posant $F_n = \frac{f_n}{f'_n}$ $F_{n-1} = \frac{f_{n-1}}{f'_{n-1}}$

on a : $F'_n = \frac{f_n'^2 - f_n f_n''}{f_n'^2}$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, on reconnaît là, l'inverse de la formule donnant l'ordre de multiplicité d'une racine.

On posera : $F'_n = \frac{1}{P_n}$.

Donc, la formule (I) devient :

$$(I') \quad z_{n+1} = z_n + \frac{(z_{n-1} - z_n) [F_n^2 - F_n F_{n-1}]}{(z_{n+1} - z_n) (F_{n-1}/P_n + F_n^2 - F_n F_{n-1})}$$

L'ordre de convergence est alors de 2.414 quel que soit l'ordre de multiplicité des racines étudiées.

Son coefficient d'efficacité est : $E = 2.414^{1/5} = 1.19$.

De la même façon, (II) se transforme en :

$$(II') \quad z_{n+1} = z_n - \frac{(z_n - z_{n-1}) ((F_n^2 F_{n-1} - F_n F_{n-1}^2) - (z_n - z_{n-1}) F_n^2 / P_{n-1})}{2 F_n F_{n-1} (F_n - F_{n-1}) - (z_n - z_{n-1}) (F_{n-1}^2 / P_n + F_n^2 / P_{n-1})}$$

L'ordre de convergence est de 2.73 quelles que soient les racines.

Il est cependant à noter que par rapport à (I'), elle nécessite en plus le calcul de f''_{n-1} pour déterminer P_{n-1} donc son efficacité est plus faible (coefficient = $2.732^{1/6} \approx 1.18$).

5.2. Analyse des programmes

Les deux précédentes formules ont été programmées de manière identique en réel et en complexe.

Il y avait deux choix possibles :

a) Appliquer directement (I') ou (II') .

Nous avons rejeté ce principe car il était très coûteux inutilement, dans le cas de racines simples (calculs de f''_n pour l'une et f''_{n-1} et f''_n pour l'autre).

b) La deuxième solution qui a été adoptée consiste à calculer les premières itérations par la formule de JARRATT (I) ou (II) ; puis comme pour Newton-P ou Laguerre-P, lorsqu'on est assuré d'être au voisinage d'une racine multiple, on applique alors (I') ou (II').

5.3. Résultats numériques

a) Polynôme P_{33} (racines voisines)

Nous avons obtenu avec $\varepsilon = 1.10^{-11}$ et V.I = 0,05

par (I')		par (II')	
0.889 999 948 ...	} en 30 itérations	0.889 999 999 954	} en 26 itérations
0.880 000 017 ...		0.879 999 939	
0.900 000 051 ...		0.900 000 18	
0.909 999 982 ...		0.909 999 87	

b) Polynôme P_{12} (racines quelconques) (cf. Annexe 1)

$$\varepsilon = 1.10^{-13} \quad \text{V.I.} = 0 \text{ et } 0.5 i$$

Par (I') et (II') nous avons obtenu les résultats exacts respectivement en 34 itérations et 19 itérations.

c) Polynôme P_{23} (racines multiples)

$$\varepsilon = 1.10^{-11} \quad \text{V.I.} = 0 \text{ et } 0.5.$$

Avec (I')

Avec (II')

0.1000003500772015D+01 0.0	0.9999994981576406D+00 0.0
0.1000003500772015D+01 0.0	0.9999994981576406D+00 0.0
0.1000003500772015D+01 0.0	0.9999994981576406D+00 0.0
0.9999894980025776D+00 0.0	0.1000001505533806D+01 0.0
0.1999992274517079D+01 0.0	0.1999999215038391D+01 0.0
0.1999992274517079D+01 0.0	0.1999999215038391D+01 0.0
0.2000015450091226D+01 0.0	0.2000001569900715D+01 0.0
0.3000001266473349D+01 0.0	0.3000000024064610D+01 0.0
0.2999998734574272D+01 0.0	0.2999999975926297D+01 0.0
0.39999999999508367D+01 0.0	0.40000000000024863D+01 0.0

en 59 itérations

en 53 itérations

REMARQUES :

Les résultats obtenus par les deux méthodes sont bons. Le gain en itérations de (II') par rapport à (I') est compensé par le calcul supplémentaire de dérivées secondes ; c'est d'ailleurs ce que montre leurs indices d'efficacité qui sont très semblables.

Il faut cependant noter avec [20], que les méthodes sont d'autant meilleures que les valeurs de départ sont proches de la racine. Il est nécessaire de choisir deux valeurs de départ et c'est là un des principaux défauts de ce type de méthode. Dans les essais effectués nous avons pris systématiquement 0 et 0.5, qui ne sont certes pas les valeurs optimales pour tous les polynômes.

Notons, en outre, que l'ordre de multiplicité est calculé, ce qui permet d'utiliser les résultats du chapitre I.2.

C'est ainsi qu'avec (II') nous trouverions

x_1	= 1.000 000 000 000 602	de multiplicité	4
x_2	= 1.999 999 999 999 692	-	3
x_3	= 3.000 000 000 000 966	-	2
x_4	= 3.999 999 999 998 684	-	1

Ces résultats sont comparables à ceux obtenus avec Newton-P ou mieux encore avec Laguerre-P.

d) Polynôme du 16ème degré P_{24}

$$\varepsilon = 1.10^{-12} \quad \text{VI} = 0,0.5i$$

Avec (I')

```

-0.50000011761490172D+00 0.1322883837500773D+01
-0.50000011761490172D+00-0.1322883837500773D+01
-0.50000011761490172D+00 0.1322883837500773D+01
-0.50000011761490172D+00-0.1322883837500773D+01
-0.50000011761490172D+00 0.1322883837500773D+01
-0.50000011761490172D+00-0.1322883837500773D+01
-0.49999964727765012D+00 0.1322851113480106D+01
-0.49999964727765012D+00-0.1322851113480106D+01
-0.5000169639921060D+00 0.1658309874943683D+01
-0.5000169639921060D+00-0.1658309874943683D+01
-0.49999944666144464D+00 0.1658310107925623D+01
-0.49999944666144464D+00-0.1658310107925623D+01
-0.49999942109814707D+00 0.1658310949509894D+01
-0.49999966695855171D+00-0.1658314349408232D+01
-0.49999943571876097D+00 0.1658318645126539D+01
-0.49999918985851911D+00-0.1658315245228200D+01

```

en 67 itérations.

Avec (II')

```

-0.4999480521692315D+00 0.1322918882093138D+01
-0.4999480521692315D+00-0.1322918882093138D+01
-0.4999480521692315D+00 0.1322918882093138D+01
-0.4999480521692315D+00-0.1322918882093138D+01
-0.4999907820220840D+00 0.1322759046733821D+01
-0.4999907820220840D+00-0.1322759046733821D+01
-0.5001131136103427D+00 0.1322905811072369D+01
-0.5001131136103427D+00-0.1322905811072369D+01
-0.4999997228654940D+00 0.1658312425343237D+01
-0.4999997228654940D+00-0.1658312425343237D+01
-0.4999997228654940D+00 0.1658312425343237D+01
-0.4999997228654940D+00-0.1658312425343237D+01
-0.4999997228654940D+00 0.1658312425343237D+01
-0.4999997228654940D+00-0.1658312425343237D+01
-0.5000008314326275D+00 0.1658312304800305D+01
-0.5000008314326269D+00-0.1658312304800305D+01

```

en 57 itérations .

Les résultats ainsi obtenus sont très bons, largement comparables à Laguerre-P ou Newton-P (cf. Annexe II).

En utilisant les résultats du chapitre I.2., on obtient :

. avec (I')

```

-0.500 000 000 3 ± i 1.322 875 656 5      de multiplicité 4
-0.499 999 999 7 ± i 1.658 312 394 4

```

. avec (II')

```

-0.499 999 999 992 ± i 1.322 875 655 484      de multiplicité 4
-0.500 000 000 000 7 ± i 1.658 312 395 20

```


6- Conclusion

Les méthodes étudiées dans ce chapitre peuvent être intéressantes quel que soit le polynôme. Leurs indices d'efficacité principalement pour (I'), sont comparables à celui de Newton-P mais sans doute sont-elles plus compliquées. Leur principal défaut est la nécessité de connaître 2 points de départ pour faire démarrer les itérations.

Chapitre V

-

M E T H O D E P A R T I C U L I E R E

Méthode de BAIRSTOW

1 - Introduction

C'est une des plus anciennes méthodes (1914). Elle a l'avantage de fournir les racines par couple avec un ordre de convergence relativement élevé.

Elle sera donc particulièrement intéressante dans le cas de polynômes à racines complexes, chaque racine et sa conjuguée étant obtenues en même temps.

Nous nous proposons dans ce chapitre, d'améliorer la méthode de BAIRSTOW classique.

2 - Rappel de la méthode

Soit un polynôme $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$,
 $a_0, a_1, \dots, a_n$ étant réels.

L'idée de base est de trouver un facteur quadratique qui divise ce polynôme.

Il s'agit donc d'écrire $P_n(z)$ sous la forme :

$$P_n(z) = (z^2 + pz + q) (b_0 z^{n-2} + \dots + b_{n-2}) + Rz + S$$

$b_0, \dots, b_{n-2}, R, S$ étant des fonctions de p et q .

Il faut que R et S soient nuls pour que $(z^2 + pz + q)$ divise exactement $P_n(z)$.

Donc, pour obtenir les deux racines correspondantes, il faut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} R(p, q) = 0 \\ S(p, q) = 0 \end{cases} .$$

Soit p_0, q_0 les valeurs initiales, Δp et Δq les "corrections" correspondantes.

On applique au système :

$$\begin{cases} R(p_0 + \Delta p, q_0 + \Delta q) = 0 \\ S(p_0 + \Delta p, q_0 + \Delta q) = 0 \end{cases}$$

la méthode itérative de Newton.

On a alors :

$$(1) \quad \begin{cases} R(p_0, q_0) + \Delta p \left(\frac{\partial R}{\partial p} \right)_0 + \Delta q \left(\frac{\partial R}{\partial q} \right)_0 = 0 \\ S(p_0, q_0) + \Delta p \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_0 + \Delta q \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)_0 = 0 \end{cases}$$

REMARQUE :

Dans (1), nous n'avons pris que les éléments du 1er ordre du développement de Taylor ; pour améliorer la précision on est tenté de prendre d'autres termes, on obtient alors la méthode de BAIRSTOW généralisée avec un ordre de convergence plus élevé (cf. JAIN et KRISHAN [18]). Les calculs sont cependant nettement plus longs et compliqués.

La résolution du système (1) donne Δp et Δq et la procédure est répétée avec les nouvelles valeurs corrigées

$$p_{i+1} = p_i + \Delta p_i, \quad q_{i+1} = q_i + \Delta q_i \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Pour obtenir Δp et Δq à chaque itération, le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} c_{n-2} \Delta p + c_{n-3} \Delta q = b_{n-1} \\ \overline{c_{n-1}} \Delta p + c_{n-2} \Delta q = b_n \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} b_k = a_k - p b_{k-1} - q b_{k-2} & k = 1, \dots, n \\ b_{n-1} = R & b_0 = a_0 \quad b_{-1} = 0 \\ b_n + p b_{n-1} = a_n - q b_{n-2} = S \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} c_k = a_k - p c_{k-1} - q c_{k-2} & k = 1, 2, \dots, n-1 \\ \overline{c_{n-1}} = c_{n-1} - b_{n-1} & c_0 = a_0 \quad c_{-1} = 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} \Delta p = (b_{n-1} c_{n-2} - c_{n-3} b_n) / (c_{n-2}^2 - \overline{c_{n-1}} c_{n-3}) \\ \Delta q = (b_n c_{n-2} - b_{n-1} \overline{c_{n-1}}) / (c_{n-2}^2 - \overline{c_{n-1}} c_{n-3}) \end{cases}$$

$$\text{ou } \Delta q = (b_{n-1} - c_{n-2} \Delta p) / c_{n-3}$$

Un théorème de KANTOROVICH donne des conditions sur R et S et sur les valeurs de p et q, qui assurent la convergence.

Malheureusement la vérification de ces conditions n'est que très difficilement réalisable.

D'après son origine (résolution du système par la méthode de Newton), la convergence est donc quadratique dans le cas de racines simples et devient linéaire en présence de racines multiples.

3 - Etude du programme

3.1. Choix des valeurs de départ - Difficultés - Modifications apportées

Généralement, les valeurs initiales choisies sont $p = 0$, $q = 0$. Ces points de départ ont l'avantage de conduire en principe aux racines de plus petit module. Il faut cependant noter, comme pour Newton, que

ce n'est pas vrai dans tous les cas.

De plus ce choix conduit à une divergence de la méthode pour certaines familles de polynômes, en particulier pour la famille définie par $z^n - a = 0$, où a est une constante positive.

Cela vient du fait que, pour ce type de polynôme, avec $p=0$ et $q=0$, le déterminant du système de deux équations à deux inconnues donnant Δp et Δq est nul.

En fait, cette difficulté se trouvera à chaque fois que l'un des déterminants intervenant au cours du calcul sera nul ou voisin de zéro.

Il sera donc nécessaire de se prémunir contre cette éventualité par un test et modifier les valeurs de p et q correspondantes.

a) Dans le programme, nous ajouterons arbitrairement 1 à p et 1.75 à q .

La première modification envisagée avait été de prendre $p = p+1$, $q = q+1$.

Cependant, en considérant le polynôme $z^4 - 1 = 0$, en partant avec $p_0 = 0$, $q_0 = 0$, le dénominateur était nul. Après transformation, on avait alors $p_0 = 1$, $q_0 = 1$, on obtenait $\Delta p = -1$ et $\Delta q = -1$ et $p_1 = p_0 + \Delta p$ et $q_1 = q_0 + \Delta q$ étaient égaux à zéro tous les deux, et le processus bouclait.

Ce phénomène peut se produire, en particulier, dans le cas de polynôme à coefficients symétriques, c'est pourquoi nous avons introduit une dissymétrie dans la transformation de p et q .

b) En réalité, nous n'avons pas gardé le choix de $p_0 = 0$, $q_0 = 0$.

Nous avons préféré prendre les trois derniers termes de l'équation polynômiale : $a_{n-2}z^2 + a_{n-1}z + a_n$, p_0 et q_0 devenant alors respectivement égaux à $\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ et $\frac{a_n}{a_{n-2}}$. Nous avons considéré ce trinôme comme donnant une approximation des racines de plus petit module.

En effet, plus les racines seront "petites", moins les termes négligés $a_0 z^n + \dots + a_{n-3} z^3$ auront de l'influence et à fortiori si les racines sont inférieures à 1, les termes de plus bas degré seront prépondérants.

Ce choix correspond donc aussi à la préoccupation d'obtenir les racines de plus petit module en premier.

Nous avons pu constater qu'il y a, en général, un gain sur le nombre d'itérations et si ce dernier est le même, la précision est alors souvent meilleure.

exemple: Test sur le polynôme 4.1.

Résultats avec même ϵ :

$p = 0$ $q = 0$		Détermination de p_0 et q_0 à chaque nouveau calcul.
$\begin{cases} R = -0.12 \cdot 10^{-7} \\ S = -0.22 \cdot 10^{-7} \end{cases}$ en 6 itérations		$\begin{cases} R = -0.18 \cdot 10^{-11} \\ S = -0.14 \cdot 10^{-10} \end{cases}$ en 6 itérations
		$\begin{cases} R = -0.3 \cdot 10^{-10} \\ S = 0.9 \cdot 10^{-10} \end{cases}$ en 6 itérations
		$\begin{cases} R = -0.79 \cdot 10^{-2} \\ S = 0.31 \cdot 10^{-11} \end{cases}$ en 17 itérations
		$\begin{cases} R = -0.6 \cdot 10^{-10} \\ S = 0.18 \cdot 10^{-9} \end{cases}$ en 6 itérations
		$\begin{cases} R = 0 \\ S = -0.34 \cdot 10^{-12} \end{cases}$ en 15 itérations

REMARQUE :

Ce choix ne peut être évidemment fait si $a_{n-2} = 0$.
 Dans ce cas nous prendrons $p = 0$ et $q = 0$.

c) Autre difficulté rencontrée

Soit le polynôme 4.1.

Après déflation pour 4 racines, nous obtenons le polynôme suivant :

$$z^4 + 6.249 \dots z^3 - 6.94 \dots z^2 - 522.8 \dots z - 2284.55 = 0$$

a_{n-1} et a_n sont très importants par rapport à a_{n-2} , ce qui donne les valeurs de départ p_0, q_0 élevées (75... et 329...). On est certes dans le cas de racines restantes à modules élevés, mais les valeurs initiales choisies se sont avérées vraiment trop éloignées des racines exactes.

En conséquence, dès que p_0 et q_0 calculées sont supérieures à 10, on impose $p_0 = q_0 = 10$, d'où un test supplémentaire dans le programme.

Dans l'exemple indiqué, sans le test, 15 itérations ont été nécessaires, contre 7 avec le test.

3.2. Tests d'arrêt

a) Pour arrêter les itérations, nous avons choisi de tester le quotient $\frac{|\Delta p| + |\Delta q|}{|p| + |q|}$ par rapport à une valeur ϵ choisie au départ.

En fait, ce test seul n'est pas très satisfaisant.

Si la précision demandée est trop forte, la procédure pourra effectuer un grand nombre d'itérations inutiles ou même ne "jamais" s'arrêter.

Les tests faits sur $|R|$ et $|S|$ ou sur $|\Delta p|$ et $|\Delta q|$ indépendamment les uns des autres conduisent aux mêmes difficultés.

Il est donc nécessaire de savoir si "l'erreur" donnée par $\frac{|\Delta p| + |\Delta q|}{|p| + |q|}$ oscille et surtout à quel moment elle commence à osciller. Le problème est donc semblable à celui de toute méthode à laquelle on demande une précision trop importante.

Là aussi, une difficulté supplémentaire vient du fait que pour les premières itérations, il peut y avoir des oscillations qui disparaissent dès que l'on s'est suffisamment approché de la racine.

L'idée de commencer à tester les oscillations de l'erreur après un certain nombre d'itérations (par exemple 10) a été finalement abandonnée.

Puisque les éventuelles premières oscillations peuvent avoir lieu du fait de l'éloignement par rapport à une racine des premières valeurs itérées, il suffit de faire le test dès que l'on se trouve dans un voisinage de la racine, défini par exemple par $\frac{|\Delta p| + |\Delta q|}{|p| + |q|} < 0.01$.

C'est la solution que nous avons adoptée dans le programme et qui conduira à des résultats satisfaisants pour des polynômes mal conditionnés ou dans les cas où la précision exigée est trop forte (cf. essais du paragraphe 5).

Le test d'oscillations se fait sur le module de l'erreur de deux itérations successives. Dès que l'erreur se met à croître, on arrête la procédure.

Là encore, nous ne sommes pas assurés d'avoir obtenu la meilleure valeur possible, mais les oscillations étant aléatoires, ce test simple a donné un résultat satisfaisant dans tous les exemples traités (cf. l'essai 5.9. où 4 oscillations ont été constatées).

La précision maximale que l'on puisse espérer est très difficile à

évaluer, dépendant de nombreuses variables ($a_i, b_i, c_i, R, S \dots$).

WOZNIAKOWSKI [57] a inclu à son programme de Bairstow une procédure qui, en principe, doit donner une estimation des erreurs ainsi que le calcul des erreurs faites sur les coefficients du reste de la division des polynômes par le facteur quadratique trouvé.

b) Nous avons vu que la résolution du système (1) donnait :

$$\Delta p = (c_{n-2} * b_{n-1} - c_{n-3} * b_n) / (c_{n-2}^2 - \overline{c_{n-1}} c_{n-3})$$

$$\Delta q = (b_n * c_{n-2} - b_{n-1} * \overline{c_{n-1}}) / (c_{n-2}^2 - \overline{c_{n-1}} c_{n-3})$$

REMARQUE :

Δq pouvait aussi s'écrire en fonction de Δp :

$$\Delta q = (b_{n-1} - c_{n-2} * \Delta p) / c_{n-3}$$

Les résultats en utilisant l'une ou l'autre des expressions de Δq ne sont pas exactement les mêmes. Nous retrouvons là encore, le phénomène bien connu de l'influence de l'ordre des opérations sur les résultats.

Mais c_{n-3} pouvait devenir nul pour des polynômes à coefficients symétriques (par exemple : $z^6 + 3z^4 + 3z^2 + 1 = 0$), sans pour autant que le dénominateur de Δp et Δq le soit. C'est pourquoi nous avons conservé la première forme.

Ce dénominateur commun peut aussi s'annuler soit du fait des valeurs initiales choisies, soit que les itérations voisines d'une racine ne progressent plus et n'atteignent pas la précision désirée.

Le test choisi alors se décompose en 2 parties :

Si le dénominateur $\leq 1.10^{-30}$, il est considéré comme nul et l'erreur est testée comme en 3.2.a),

• Si $\frac{|\Delta p| + |\Delta q|}{|p| + |q|} > 0.01$, on considère que l'on est éloigné d'une racine et les valeurs de p et q sont alors modifiées ($p = p+1, q = q+1.75$) et on recommence les itérations (voir les essais de 4.2.)

• Si par contre, l'erreur < 0.01 , on ne peut espérer s'approcher

plus d'une racine, on admet alors avoir trouvé deux racines.

Il est inutile de modifier p et q , car on reviendrait à un système en Δp et Δq instable (pratiquement singulier).

Nous pouvons noter, qu'en général, le test sur les oscillations fonctionne avant ce dernier.

c) Un dernier test de sécurité est prévu sur le nombre maximal d'itérations à ne pas dépasser. Ce nombre peut être donné par programme.

4 - Résultats numériques

4.1. Polynôme du 4ème degré P_{33} (racines voisines)

Avec $\varepsilon = 1.10^{-10}$ en 20 itérations nous avons obtenu :

```

0.880 000 000 0 1 ...
0.899 999 999 9 6 ...
0.900 000 000 0 3 ...
0.909 999 999 9 8

```

Les racines voisines sont donc bien séparées, en un nombre assez important d'itérations (20).

4.2. Polynôme du 4ème degré $z^4 - 1 = 0$

Puisque $a_{n-2} = 0$, nous partons avec $p = 0$, $q = 0$ et le dénominateur est alors nul ; nous modifions alors les valeurs de départ ($p=1$, $q=1.75$).

Avec $\varepsilon = 1.10^{-10}$ et en 8 itérations, nous avons :

```

{  -0.3 ... 10-14          - i 0.999 999 999 999 9 8
   -0.3 ... 10-14          + i 0.999 999 999 999 9 8
   -0.999 999 999 999 9 7  + i 0.
   +0.999 999 999 999 9 8  + i 0.

```


A noter que nous aurions les mêmes résultats en prenant $\epsilon = 1.10^{-13}$. Ceci est dû à la rapidité de la convergence.

REMARQUE :

Nous avons pu sur cet exemple enregistrer le phénomène intéressant d'oscillations pour les premières itérations.

Itérations	Valeur de l'erreur	
2	0.44	
3	0.88	
4	2.022	
5	0.326	
6	0.171	↓ convergence amorcée .
7	0.0240	

4.3. Polynôme du 6ème degré symétrique P_{22}

Résultats avec $\epsilon = 1.10^{-10}$:

0.0	- i	0.999 996	}	30 itérations
0.0	+ i	0.999 996		
0.0	- i	0.999 998	}	17 itérations
0.0	+ i	0.999 998		

La précision n'était pas atteinte, mais l'erreur commençait à osciller.

0.0	- i	1.000 001 9	}	0 itération (calcul direct)
0.0	+ i	1.000 001 9		

La précision des résultats n'est pas excellente, mais ce polynôme est mal conditionné.

Avec $\epsilon = 1.10^{-13}$, les mêmes résultats auraient été obtenus là encore.

REMARQUE :

Nous pouvons noter que le programme de WOZNIAKOWSKI [57] ne fournit pas de solution pour ce polynôme.

4.4. Polynôme du 8ème degré P_{13}

Résultats avec $\varepsilon = 1.10^{-10}$:

$$\left. \begin{array}{l} - 1.750\ 888\ 258\ 065\ 096 \\ 2.0 \text{ ————— } 0 \end{array} \right\} \text{ en 6 itérations (R = S = } \Delta p = \Delta q = 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} - 2.999\ 999\ 999\ 999\ 930 \\ 3.0 \text{ ————— } 0 \end{array} \right\} \text{ en 6 itérations}$$

$$\left. \begin{array}{l} - 5.000\ 000\ 000\ 000\ 062 \\ 7.848\ 532\ 374\ 733\ 095 \end{array} \right\} \text{ en 7 itérations}$$

et

$$\left. \begin{array}{l} - 4.548\ 822\ 058\ 334\ 004 \quad - i\ 6.125\ 709\ 524\ 872\ 851 \\ - 4.548\ 822\ 058\ 334\ 004 \quad + i\ 6.125\ 709\ 524\ 872\ 851 \end{array} \right\} \text{ en 0 itérations}$$

19 itérations ont donc été nécessaires pour trouver les 6 racines réelles et les 2 racines complexes.

4.5. Polynôme du 8ème degré $z^8 - 1 = 0$

Le même problème que pour $z^4 - 1$ se pose. Les valeurs de départ sont modifiées pour la recherche des deux premières racines.

Résultats avec :

a) $\varepsilon = 1.10^{-10}$

$$\left. \begin{array}{l} -0.382\ 683\ 432\ 365\ 1946 \quad - i\ 0.923\ 879\ 532\ 511\ 288\ 7 \\ -0. \text{ ————— } + i\ 0. \text{ ————— } \end{array} \right\} \text{ 8 itérations}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0.923\ 879\ 532\ 526\ 466\ 0 \quad - i\ 0.382\ 683\ 432\ 096\ 275\ 0 \\ 0. \text{ ————— } + i\ 0. \text{ ————— } \end{array} \right\} \text{ 17 itérations}$$

$$\left. \begin{array}{l} -0.923\ 879\ 532\ 694\ 811\ 4 \quad - i\ 0.382\ 683\ 432\ 653\ 494\ 1 \\ -0 \text{ ————— } + i\ 0. \text{ ————— } \end{array} \right\} \text{ 6 itérations}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0.382\ 683\ 432\ 533\ 540\ 0 \quad - i\ 0.923\ 879\ 532\ 771\ 691\ 9 \\ 0. \text{ ————— } + i\ 0. \text{ ————— } \end{array} \right\} \text{ 0 itérations}$$

b) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.382 683 432 365 089 <u>8</u> - i 0.923 879 532 511 286 <u>7</u>	}	9 itérations
-0. _____ + i 0. _____		
0.923 879 532 511 286 9 - i 0.382 683 432 365 089 <u>6</u>	}	18 itérations
0. _____ + i 0. _____		
-0.923 879 532 511 286 9 - i 0.382 683 432 365 089 <u>6</u>	}	7 itérations
-0. _____ + i 0. _____		
0.382 683 432 365 089 <u>8</u> - i 0.923 879 532 511 286 <u>9</u>	}	0 itération
0. _____ + i 0. _____		

Avec 3 itérations supplémentaires (34/31), nous avons obtenu les résultats exacts.

4.6. Polynôme du 10ème degré P_{23}

$$(z-1)^4(z-2)^3(z-3)^2(z-4) = 0.$$

$$\epsilon = 1.10^{-13}$$

Résultats :

0.9994739140631613D+00	-0.4057399311364921D-03
0.9994739140631613D+00	0.4057399311364921D-03
0.1000399532422931D+01	-0.4682423362395300D-03
0.1000399532422931D+01	0.4682423362395300D-03
0.1999585985829890D+01	-0.7172814938434171D-03
0.1999585985829890D+01	0.7172814938434171D-03
0.2000828029826195D+01	0.0
0.2999988119304596D+01	0.0
0.3000011880798961D+01	0.0
0.39999999999994533D+01	0.0

en 90 itérations.

REMARQUES :

a) Nous pouvons citer là, par comparaison, une méthode due à DVORCUK [4]. Contrairement à Bairstow, la factorisation du polynôme

$$\text{est totale : } f(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i} = a_0 \prod_{j=1}^n (z^2 + p_j z + q_j) .$$

(Les a_i sont réels). Les racines sont trouvées simultanément.

Un système d'équations est alors résolu.

La méthode est longue, et il y a particulièrement cumul d'erreurs pour des polynômes à racines multiples.

b) On peut noter, ce qui était à prévoir (polynôme mal conditionné), que le test sur les oscillations de l'erreur a été utilisé trois fois, la précision demandée ne pouvant alors être atteinte.

4.7. Polynôme du 16ème degré P_{24}

Pour le calcul de 4 facteurs quadratiques, la précision n'a pu être atteinte ; il y avait oscillation de l'erreur.

Les résultats ne sont pas très bons en 140 itérations. Cela est dû à la présence de racines voisines multiples.

Résultats avec $\epsilon = 1.10^{-13}$

-0.4996555267305389D+00	-0.1321919840594082D+01
-0.4996555267305389D+00	0.1321919840594082D+01
-0.4997324051019184D+00	-0.1322775214424089D+01
-0.4997324051019184D+00	0.1322775214424089D+01
-0.4996597726537250D+00	-0.1323109951762820D+01
-0.4996597726537250D+00	0.1323109951762820D+01
-0.5008201611757199D+00	-0.1322912506608742D+01
-0.5008201611757199D+00	0.1322912506608742D+01
-0.5039159826644373D+00	-0.1656661164384203D+01
-0.5039159826644373D+00	0.1656661164384203D+01
-0.4987949245886415D+00	-0.1655640292417779D+01
-0.4987949245886415D+00	0.1655640292417779D+01
-0.4973003859454588D+00	-0.1659506543822191D+01
-0.4973003859454588D+00	0.1659506543822191D+01
-0.5012202185062224D+00	-0.1661022889908581D+01
-0.5012202185062224D+00	0.1661022889908581D+01

en 140 itérations

4.8. Polynôme du 16ème degré P_{15}

Avec $\epsilon = 1.10^{-13}$, en 60 itérations nous avons obtenu les résultats suivants :

-0.2935045292343848D+00	-0.1434992969275004D+00
-0.2935045292343848D+00	0.1434992969275004D+00
-0.2244700578790217D+00	-0.4509279583014905D+00
-0.2244700578790217D+00	0.4509279583014905D+00
-0.1476237802266760D+00	-0.7717572010638475D+00
-0.1476237802266760D+00	0.7717572010638475D+00
-0.9003998874145440D-01	-0.1061192059843201D+01
-0.9003998874145440D-01	0.1061192059843201D+01
-0.5086443560477500D-01	-0.1296911279073366D+01
-0.5086443560477500D-01	0.1296911279073366D+01
-0.2566871050074845D-01	-0.1474377143826329D+01
-0.2566871050074845D-01	0.1474377143826329D+01
-0.1049355009614989D-01	-0.1596295495554757D+01
-0.1049355009614989D-01	0.1596295495554757D+01
-0.2489202445306339D-02	-0.1667120361217426D+01
-0.2489202445306339D-02	0.1667120361217426D+01

Les résultats sont bons. Il faut noter que les racines ont été obtenues dans le même ordre que Wilkinson qui a pris comme valeur de départ $p=0$, $q=0$ à chaque calcul.

4.9. Polynôme du 16ème degré P_{35}

Avec $\epsilon = 1.10^{-13}$ il a fallu 116 itérations. En effet les racines sont relativement voisines, sans être multiples cependant.

Résultats :

(voir page suivante)

-0.18694995344 <u>6</u> 3326D-01	-0.2530456818772 <u>2</u> 721D+00
-0.18694995344 <u>6</u> 3326D-01	0.2530456818772 <u>2</u> 721D+00
-0.2320944728125693D-02	-0.2925837450254278D+00
-0.2320944728125693D-02	0.2925837450 <u>2</u> 54278D+00
-0.4914448728847958D-03	-0.3041823954703839D+00
-0.4914448728847958D-03	0.3041823954703839D+00
-0.1427551752601603D-03	-0.3086121061256826D+00
-0.1427551752601603D-03	0.3086121061256826D+00
-0.1324472469902464D+00	-0.1360055079513775D+00
-0.1324472469902464D+00	0.1360055079513775D+00
-0.4664100895353214D-04	-0.3106618988044232D+00
-0.4664100895353214D-04	0.3106618988044232D+00
-0.1565937762388091D-04	-0.3116962406681678D+00
-0.1565937762388091D-04	0.3116962406681678D+00
-0.261668466533325D-05	-0.3121969971776673D+00
-0.261668466533325D-05	0.3121969971776673D+00

5 - Conclusion

La méthode de Bairstow est très intéressante pour des polynômes à coefficients réels et à racines complexes simples.

Elle perd cependant une partie de son efficacité dans le cas de polynômes à racines multiples.

Chapitre VI

-

COMPARAISON DES METHODES

CONCLUSIONS

Comparaison des Méthodes

Conclusions

1 - Méthodes programmées

Parmi les méthodes programmées, nous avons sélectionné celles qui nous paraissaient représentatives de chaque catégorie étudiée précédemment, (le nom du programme correspondant indiqué entre parenthèses servira de référence pour les annexes). Chaque programme contient évidemment les remarques, modifications ou nouvelles approches indiquées dans le chapitre correspondant.

Nous avons donc testé :

- Méthode due à MOTTELER (MOT)
- Méthode due à LEHMER-SCHUR (LEHM)

- Méthode de NEWTON simple (NEWS)
- Méthode de Newton avec le calcul de l'ordre de multiplicité NEWTON-P (NP)
- Méthode de HALLEY (HAL)
- Méthode de LAGUERRE simple (LAG)
- Méthode de Laguerre avec détermination de l'ordre de multiplicité LAGUERRE-P (LAGP)

- Méthode de MULLER (MUL)
- Méthode d'interpolation par trois points dont deux coïncident, avec le calcul de l'ordre de multiplicité (INTP)
- Méthode semblable à la précédente, mais avec interpolation par quatre points dont deux sont confondus (JARP)
- Parmi les méthodes d'ordre élevé, nous avons choisi celle proposée par JARRATT (J4)
- Méthode générale sur une idée de JARRATT-GARSDIE-MACK (J.G.M.)

- Méthode de BAIRSTOW (BAIR)

2 - Stratégie adoptée pour le choix de la ou des valeurs initiales

Nous avons vu, lors des chapitres précédents, que pour les méthodes à un point d'appui, il était souvent très bénéfique de repartir à chaque nouveau calcul, avec la valeur de la racine précédemment trouvée (ou avec sa conjuguée si elle est complexe).

Pour un certain nombre d'algorithmes, cette façon d'opérer peut être dangereuse. Si une racine réelle est trouvée, et si nous repartons avec sa valeur comme point initial, nous ne pourrions trouver les autres racines complexes, s'il y en a.

Dans la plupart des résultats reproduits en annexe, nous avons adopté le principe suivant pour les méthodes à un point de départ :

- la 1ère valeur initiale z_0 est complexe (par ex. $0+0.5i$)

a) Si la méthode choisie ne peut conduire à des racines complexes avec une valeur initiale réelle (NEWS, NP, HALL, J4, INTP ...), les valeurs de départ seront alors alternativement z_0 et $\overline{z_0}$. Le signe de la partie imaginaire sera choisi opposé au signe de la partie imaginaire de la racine

précédemment trouvée. L'alternance de ce signe permet d'éviter partiellement le cumul d'erreurs qui peut se produire lorsque les racines complexes ayant même signe devant leur partie imaginaire sont obtenues en premier, leurs conjuguées étant trouvées par la suite.

b) Pour les autres méthodes plus générales, pour lesquelles ce phénomène ne peut se produire (LAG, LAGP,...), nous repartirons avec la conjuguée de la racine trouvée, ce qui très souvent fait gagner un grand nombre d'itérations.

REMARQUE :

Pour les méthodes à deux points d'appui (INTP, JARP ..), le 1er point a été choisi réel (généralement égal à zéro), le 2ème complexe, comme indiqué ci-dessus.

3 - Critères de classement des différentes méthodes

Il est difficile de classer des méthodes souvent très différentes. Les critères possibles de sélection sont nombreux. Nous retiendrons en particulier les suivants :

- Obtention de toutes les racines

Les méthodes utilisées répondent en principe à cet objectif fondamental. Certaines peuvent cependant dans des cas très particuliers ne pas converger ; nous avons essayé de pallier cet inconvénient dans les programmes exécutés.

- Importance du choix des valeurs initiales

Indépendamment des cas de non-convergence, le choix des valeurs initiales est généralement important pour la rapidité de convergence.

Certaines méthodes (LEHM, MOT) démarrent par elles-mêmes. Dans d'autres cas, nous avons inclus au programme une procédure de démarrage automatique des itérations (cf. MUL, J.G.M., BAIR). Les valeurs de départ sont donc pour les méthodes précédentes choisies par le programme. .

Même en adoptant la stratégie décrite au § 2, les autres méthodes testées nécessitent au moins le choix par l'utilisateur de la 1ère valeur initiale. La méthode de Laguerre n'est pas ou peu affectée par ce choix (cf. III.B.), par contre, les algorithmes du type de Newton et ses dérivées, ou comme INTP, JARP ... sont généralement très dépendants des points de départ. Ceux-ci étant souvent arbitraires, ces méthodes perdent de ce fait une certaine efficacité (cf. IV.D).

- Le temps machine

Ce critère n'est pas absolument significatif. Il est fortement lié au choix des valeurs initiales, à la forme et au conditionnement du polynôme, à la disposition des racines. Il est dépendant aussi des critères de précision permettant l'arrêt de la méthode. Ces tests ne sont et ne peuvent être les mêmes dans tous les cas, ils sont fonction du caractère propre de chaque algorithme. Seules des différences de temps d'exécution vraiment significatives pourront justifier un certain classement des méthodes.

- indice d'efficacité

Comme nous l'avons vu dans le chapitre sur les généralités, ce critère est trop local pour lui attacher une grande importance. Il est en fait, lié au précédent ; si une méthode a un indice d'efficacité élevé, on peut espérer que le temps de calcul sera relativement faible. Cette remarque n'est cependant pas évidente, le choix des valeurs de départ restant souvent fondamental.

A l'aide de ces critères, nous avons essayé de comparer les différentes méthodes entre elles. Le "classement" est cependant fonction des polynômes étudiés, c'est pourquoi il est décomposé en trois catégories :

- cas des polynômes à racines distinctes bien séparées,
- cas des polynômes à racines multiples,
- cas des polynômes à racines voisines.

4 - Comparaison des différentes méthodes

4.1. Cas des polynômes à racines distinctes bien séparées

(cf. Annexe I)

a) Les méthodes de localisation du chapitre II sont généralement peu rapides lorsqu'elles sont utilisées comme algorithme de résolution. L'application en plus, d'une méthode à forte convergence semble indispensable. Elles ont cependant l'avantage de ne pas être tributaires de valeurs initiales.

Ce sont des méthodes sûres. Si on ne demande qu'une faible précision (1.10^{-3}) pour l'algorithme seul, avant l'application d'une méthode à forte convergence, alors elles deviennent compétitives pour les polynômes considérés.

b) Les méthodes du type Newton paraissent plus efficaces tant en précision qu'en rapidité de convergence. Il en est de même de celle de Laguerre.

La méthode du 3ème ordre choisie, celle de Halley (cf. III.A) n'est pas meilleure que celle de Newton, l'ordre de convergence étant compensé par le calcul, à chaque itération, de la dérivée seconde.

Si les temps de calcul de ces différentes méthodes sont comparables, avec un léger avantage pour celle de Newton, il faut noter que le choix de la valeur initiale pour LAG est généralement peu important (cf. III.B.), ce qui est un avantage majeur.

Dans ce groupe, nous donnerons donc la préférence à cette dernière.

c) Dans la catégorie des méthodes à plusieurs points d'appui, l'algorithme de MULLER est intéressant quelque soit le degré du polynôme, mais est particulièrement efficace dès que le degré est élevé. De plus le démarrage des itérations est automatique.

La méthode J4 à ordre de convergence élevé (4), est une des plus efficaces et la plus stable de cette famille de méthodes. Les résultats numériques prouvent qu'elle est souvent avantageusement comparable aux méthodes de Newton ou de Laguerre. Elle ne nécessite comme ces dernières

qu'une valeur initiale à chaque calcul de racine.

Les algorithmes obtenus par interpolation (INTP et JARP) sont en temps de calcul et en précision, largement comparables aux méthodes à un point d'appui. Mais le démarrage du processus itératif ne peut se faire qu'avec deux valeurs initiales.

La méthode générale élaborée sur une idée de JARRATT-GARSDIE-MACK (J.G.M.) est légèrement plus lente que les précédentes, mais donne de bons résultats quel que soit le degré du polynôme. Les valeurs initiales sont déterminées et choisies par le programme.

d) Enfin, la méthode de Bairstow est sans doute une des plus rapides, même pour des polynômes à degré élevé (cf. le polynôme P_{17}).

En conclusion pour des polynômes à bas ou moyen degré (≤ 50), il est souhaitable de choisir soit la méthode de BAIRSTOW, soit celle de LAGUERRE, cette dernière pouvant être en plus utilisée quels que soient les coefficients du polynôme.

Les autres sont comparables entre elles et le choix peut alors dépendre de la connaissance ou non d'une ou de deux valeurs initiales suffisamment proches d'une racine.

Enfin, s'il s'agit de polynômes à très haut degré, la méthode de MULLER est recommandée par certains auteurs puisqu'elle ne nécessite que l'évaluation d'une fonction à chaque itération (cette affirmation n'a pas été vérifiée, le temps machine devenant trop important pour de tels polynômes)

4.2. Cas des polynômes à racines multiples

(cf. Annexe II)

a) Les deux méthodes de localisation ne sont pas ou peu affectées par la présence des racines multiples, mais le temps de calcul est toujours relativement important. L'adjonction de la formule du 4ème degré ne permet pas pour de tels polynômes une amélioration sensible des résultats.

b) La convergence des méthodes à un point d'appui devient généralement linéaire dans le cas de racines multiples. Elles sont alors à déconseiller.

Les méthodes de NEWTON-P et LAGUERRE-P qui déterminent en principe l'ordre de multiplicité de la racine et par le fait même, sont respectivement du 2ème et 3ème ordre, sont particulièrement efficaces pour ce type de polynômes.

Rappelons que pour ces deux algorithmes, nous pouvons utiliser les résultats du chapitre I concernant les erreurs sur les racines multiples, ce qui accroît très sensiblement la précision des résultats.

La méthode de LAGUERRE-P semble un peu plus rapide que NEWTON-P et le choix de la valeur initiale a beaucoup moins d'importance.

c) Les nouvelles méthodes du chapitre IV.b. (INTP et JARP) tiennent compte aussi de l'ordre de multiplicité et donnent par conséquent des résultats très satisfaisants souvent même meilleurs que ceux des deux précédentes.

Notons les bons résultats fournis par (MUL) en partie grâce à la nouvelle détermination des valeurs initiales à chaque calcul de racine.

Enfin la méthode (J.G.M.), par la possibilité de variation de ses deux paramètres, peut fournir de très bons résultats, supérieurs à ceux de (MUL), comparables à ceux des méthodes qui déterminent la multiplicité de la racine.

d) La méthode de BAIRSTOW, si elle est toujours très rapide, devient nettement moins précise que pour des polynômes à racines distinctes.

En conclusion, pour des polynômes à racines multiples, il est conseillé de choisir les méthodes faisant intervenir l'ordre de multiplicité. Celle de LAGUERRE-P semble souvent plus efficace que celle de NEWTON-P surtout si la valeur initiale choisie est arbitraire (ce qui est très souvent le cas). Parmi les autres méthodes, (J.G.M.) semble la plus efficace.

4.3. Cas des polynômes à racines voisines

(cf. Annexe III)

Les résultats numériques nous ont permis de constater que pour ce genre de polynômes, les conclusions sont semblables au cas des polynômes à racines distinctes. Si parmi les racines voisines se trouvent

des racines multiples, alors les méthodes LAGP , NP , INTP , JARP qui permettent d'accroître la précision sur ces racines multiples sont alors nettement meilleures.

Notons enfin, là encore, l'efficacité de la méthode générale (J.G.M.) bien que le temps de calcul soit souvent supérieur à celui des précédentes.

REMARQUE sur le § 4

Volontairement, nous n'avons pas séparé le cas des polynômes à racines toutes réelles du cas général.

Si toutes les racines sont réelles, alors les méthodes du type Newton ne présentent plus, en principe, le risque de ne pas fournir toutes les racines ; en fait, ce danger existe encore, la $j^{\text{ième}}$ racine est calculée sur le polynôme obtenu après $(j-1)$ divisions par $(z-\alpha_i)$ $i=1 \dots j-1$. Les coefficients calculés sont alors entachés d'erreurs et nous savons qu'une légère modification sur ceux-ci peut transformer deux racines réelles en racines complexes. Le risque est d'autant plus grand que le polynôme est mal conditionné ou que le degré est élevé. Nous retrouvons alors le cas général, c'est-à-dire de polynômes dont les racines sont réelles et complexes.

5 - Conclusion

Si nous connaissons, à priori, la catégorie du polynôme, le choix des méthodes à utiliser est indiqué dans le paragraphe qui précède.

Dans le cas d'un polynôme quelconque, ne connaissant pas le type de racines cherchées (distinctes, multiples, voisines) quelles méthodes peut-on utiliser ?

Il ne nous semble pas que le facteur temps d'exécution soit d'une importance capitale sauf pour des polynômes à haut degré. Il est donc préférable

de choisir des méthodes donnant des résultats précis qui ne soient pas ou peu influencés par la catégorie dans laquelle le polynôme se place.

Nous pensons donc, en premier lieu aux méthodes de LAGUERRE-P et de BAIRSTOW. La première a fourni lors de tous les essais effectués des résultats toujours au moins aussi bons que ceux donnés par les autres méthodes testées. Celle de BAIRSTOW a l'avantage sur la précédente, d'être généralement plus rapide, mais par contre, elle est affectée par la présence de racines multiples.

La méthode de NEWTON-P est toujours efficace, surtout si l'on connaît une valeur approchée d'une racine.

Remarquons que les méthodes à ordre de convergence élevé ne présentent finalement qu'un intérêt relatif ; la rapidité de convergence étant très souvent compensée par la longueur des calculs. Elles sont de plus, quelquefois, très dépendantes des valeurs initiales (cf. IV.B.). Il faut cependant mettre à part les méthodes étudiées en (IV.D.) INT-P et JAR-P qui ont donné des résultats toujours satisfaisants lors des essais effectués . La méthode appelée (J.G.M.) par la possibilité de jeu de ses paramètres, peut être très efficace quel que soit le polynôme à tester.

A N N E X E S

- Les résultats répertoriés ici, ne sont pas les meilleurs pour une méthode et pour un polynôme donnés. Pour qu'ils puissent être comparés entre eux, nous avons choisi, lorsque c'était possible, une même précision (ϵ), et les mêmes valeurs initiales.

- Les valeurs de départ choisies sont celles définies en VI.2. (Dans le cas contraire, elles sont indiquées).

- Les polynômes sont repérés de la manière suivante :

P_{1a} : Polynôme à racines distinctes bien séparées (Annexe 1)

P_{2b} : Polynôme à racines multiples (Annexe 2)

P_{3c} : Polynôme à racines voisines ou multiples et voisines (Annexe 3)

(a, b, c sont des numéros d'ordre).

- Tous les calculs ont été faits en double précision (16 décimales significatives).

—

ANNEXE I

• P₁₁ : z⁴ - 1 = 0

Les racines exactes sont : -1, +1, -i, +i .

Résultats :

• Par (LEHM) $\epsilon = 1.10^{-2}$

LES RACINES SONT

0.1000000000000000D+01	0.0
-0.1590727874942077D-16	0.1000000000000000D+01
-0.1000000000000000D+01	-0.7650319866074541D-17
-0.1387778780781446D-16	-0.1000000000000000D+01

• Par (MOT) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.1000000000000000D+01	0.0
-0.1000000000000000D+01	0.0
0.0	0.1000000000000000D+01
0.0	-0.1000000000000000D+01

• Par (LAG) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.0	0.1000000000000000D+01
0.0	-0.1000000000000000D+01
0.1000000000000000D+01	0.0
-0.1000000000000000D+01	0.0

• Par (MUL) $\epsilon = 1.10^{-13}$

1	0.0	-0.1000000000000000D+01
2	0.0	0.1000000000000000D+01
3	-0.1000000000000000D+01	0.0
4	0.1000000000000000D+01	0.0

. Par (J4) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.0	0.10000000000000005D+01
0.0	-0.10000000000000005D+01
0.10000000000000005D+01	0.0
-0.10000000000000005D+01	0.0

. Par (INTP) $\epsilon = 1.10^{-13}$ V.I.

0.1000000000000000D+01	-0.2434786746004230D-21
0.4645363934833613D-16	0.1000000000000000D+01
0.4645363934833613D-16	-0.1000000000000000D+01
-0.1000000000000000D+01	0.0

. Par (J.G.M.) $\epsilon = 1.10^{-13}$

1	-0.3943925872870553D-24	0.1000000000000000D+01
2	-0.3943925872870553D-24	-0.1000000000000000D+01
3	0.1000000000000000D+01	-0.2549225891281234D-19
4	-0.1000000000000000D+01	0.2549225891281234D-19

. Par (BAIR) $\epsilon = 1.10^{-13}$

-0.3137558697529616D-14	-0.9999999999999813D+00
-0.3137558697529616D-14	0.9999999999999813D+00
-0.9999999999999781D+00	0.0
0.9999999999999844D+00	0.0

$$P_{12} : z^5 - 2z^4 + 2z^3 - 26z^2 + 19z + 22 = 0$$

Proposé par : KORGANOFF [26]

Racines exactes :

- 0. 608 557 282 647 081
- 1. 418 277 377 740 006
- 3. 152 533 289 185 718
- 0. 981 126 692 139 322 ± 2. 668 851 625 507 915 i

Résultats :

. Par (LEHM) $\epsilon = 1.10^{-3}$

LES RACINES SONT

-0.6085572826470807D+00	0.3171220838988467D-27
0.1418277377740006D+01	-0.4029569296602970D-27
0.3152533289185718D+01	0.1229821825287913D-27
-0.9811266921393217D+00	0.2668851625507915D+01
-0.9811266921393217D+00	-0.2668851625507915D+01

. Par (MOT) $\epsilon = 1.10^{-13}$

-0.6085572826470980D+00	0.0
0.1418277377740083D+01	0.0
0.3152533289185612D+01	0.0
-0.9811266921392416D+00	0.2668851625507841D+01
-0.9811266921393553D+00	-0.2668851625507841D+01

. Par (NEWS) $\epsilon = 1.10^{-13}$

-0.6085572826470807D+00	-0.1696050946225175D-27
0.1418277377740005D+01	-0.6569381183190915D-24
0.3152533289185718D+01	-0.1502378745479166D-16
-0.9811266921393216D+00	-0.2668851625507915D+01
-0.9811266921393216D+00	0.2668851625507915D+01

. Par (HAL) $\epsilon = 1.10^{-13}$ V.I.

```
-0.6085572826470808D+00 -0.1231671932091458D-20
 0.1418277377740006D+01  0.1505985702729356D-20
-0.9811266921393218D+00  0.2668851625507916D+01
-0.9811266921393218D+00 -0.2668851625507916D+01
 0.3152533289185719D+01  0.0
```

. Par (LAG) $\epsilon = 1.10^{-13}$

```
-0.6085572826470807D+00 0.0
 0.3152533289185718D+01 0.3619583541854438D-17
 0.1418277377740001D+01 -0.6803604469352137D-17
-0.9811266921393194D+00 -0.2668851625507913D+01
-0.9811266921393196D+00 0.2668851625507913D+01
```

. Par (MUL) $\epsilon = 1.10^{-13}$

```
1 -0.6085572826470807D+00 -0.3815226542576679D-17
2  0.1418277377740006D+01  0.4682839106929968D-17
3  0.3152533289185839D+01 -0.1346968026532345D-17
4 -0.9811266921393811D+00  0.2668851625508011D+01
5 -0.9811266921393811D+00 -0.2668851625508011D+01
```

. Par (J4) $\epsilon = 1.10^{-13}$

```
-0.6085572826470807D+00 -0.1550963648536927D-24
 0.1418277377740006D+01  0.8271806125530276D-23
 0.3152533289185718D+01 -0.4354146165359962D-23
-0.9811266921393217D+00  0.2668851625507915D+01
-0.9811266921393217D+00 -0.2668851625507915D+01
```

. Par (INTP) $\epsilon = 1.10^{-13}$

```
-0.6085572826470807D+00 -0.5475512411661642D-19
 0.1418277377740006D+01  0.7181125474487256D-16
 0.3152533289185718D+01 -0.3818786040016106D-16
-0.9811266921393217D+00  0.2668851625507915D+01
-0.9811266921393217D+00 -0.2668851625507915D+01
```

. Par (JARP) $\epsilon = 1.10^{-13}$

```
-0.6085572826470808D+00 -0.8933550615572698D-22
 0.1418277377740006D+01  0.7940933880509065D-22
-0.9811266921393218D+00  0.2668851625507915D+01
-0.9811266921393218D+00 -0.2668851625507915D+01
 0.3152533289185719D+01  0.0
```


. Par (J.G.M.) $\epsilon = 1.10^{-13}$

1	-0.6085572826470807D+00	0.1422473984294528D-25
2	0.1418277377740006D+01	-0.2635426512162356D-25
3	-0.9811266921393218D+00	0.2668851625507915D+01
4	-0.9811266921393218D+00	-0.2668851625507915D+01
5	0.3152533289185718D+01	0.0

. Par (BAIR) $\epsilon = 1.10^{-13}$

-0.6085572826470807D+00	0.0
0.1418277377740001D+01	0.0
-0.9811266921393205D+00	-0.2668851625507915D+01
-0.9811266921393205D+00	0.2668851625507915D+01
-0.3152533289185721D+01	0.0

$$P_{13} : z^8 + 2z^7 + 2z^6 + 50z^5 - 1250z^3 - 1250z^2 - 31250z - 390625 = 0$$

Proposé par DURAND [13]

Racines exactes : -5, +5, -5i, 5i, -4 ± 3i, 3 ± 4i

Résultats :

• Par (LEHM) $\epsilon = 1.10^{-3}$

0.5000000000000000D+01	0.1175494350822287D-37
0.3000000000000000D+01	0.4000000000000000D+01
-0.6344089749398211D-16	0.5000000000000000D+01
-0.4000000000000000D+01	0.3000000000000000D+01
-0.5000000000000001D+01	0.2083612577676210D-14
-0.4000000000000000D+01	-0.3000000000000004D+01
-0.3576140085023488D-14	-0.4999999999999996D+01
0.3000000000000003D+01	-0.4000000000000003D+01

• Par (MOT) $\epsilon = 1.10^{-13}$

-0.5000000000000000D+01	0.0
0.3000000000000000D+01	0.4000000000000000D+01
0.3000000000000000D+01	-0.4000000000000000D+01
-0.4000000000000000D+01	-0.3000000000000000D+01
-0.4000000000000000D+01	0.3000000000000000D+01
0.5000000000000000D+01	0.0
0.0	0.5000000000000000D+01
0.0	-0.5000000000000000D+01

• Par (NEWS) $\epsilon = 1.10^{-13}$

-0.5000000000000000D+01	0.6216085369402977D-16
0.5000000000000000D+01	-0.2797653391031167D-16
-0.4000000000000000D+01	0.3000000000000000D+01
-0.4000000000000000D+01	-0.3000000000000000D+01
0.2999999999999950D+01	0.3999999999999983D+01
0.2999999999999950D+01	-0.3999999999999983D+01
0.5038192085748977D-13	0.4999999999999983D+01
0.5042632977847443D-13	-0.4999999999999983D+01

. Par (HAL)

$$\varepsilon = 1.10^{-13}$$

-0.4000000000000000D+01	-0.3000000000000000D+01
-0.4000000000000000D+01	0.3000000000000000D+01
0.3000000000000000D+01	0.4000000000000000D+01
0.3000000000000000D+01	-0.4000000000000000D+01
0.3614886168179510D-15	0.5000000000000000D+01
0.3614886168179510D-15	-0.5000000000000000D+01
0.5000000000000000D+01	0.2220446047440855D-16
-0.5000000000000000D+01	-0.2220446047440855D-16

. Par (LAG)

$$\varepsilon = 1.10^{-13}$$

0.3000000000000000D+01	-0.4000000000000000D+01
0.3000000000000000D+01	0.4000000000000000D+01
-0.1807335448792461D-15	-0.5000000000000000D+01
-0.1523118354488421D-15	0.5000000000000000D+01
-0.4000000000000001D+01	-0.3000000000000000D+01
-0.4000000000000001D+01	0.3000000000000000D+01
-0.4999999999999999D+01	0.4440892098500626D-15
0.5000000000000000D+01	-0.2220446049250313D-15

. Par (MUL)

$$\varepsilon = 1.10^{-13}$$

1	-0.5000000000000000D+01	-0.2733183417714792D-22
2	-0.40000000000000013D+01	0.29999999999999981D+01
3	-0.40000000000000013D+01	-0.29999999999999981D+01
4	-0.9383492714593211D-13	0.50000000000000010D+01
5	-0.9383492714593211D-13	-0.50000000000000010D+01
6	0.30000000000000044D+01	0.400000000000000126D+01
7	0.30000000000000044D+01	-0.400000000000000126D+01
8	0.500000000000000127D+01	0.0

. Par (J4)

$$\varepsilon = 1.10^{-13}$$

-0.5000000000000000D+01	-0.1262177448353619D-28
0.5000000000000001D+01	0.2117582368135751D-21
-0.4000000000000001D+01	0.3000000000000000D+01
-0.4000000000000001D+01	-0.3000000000000000D+01
0.4760618059952267D-15	-0.5000000000000001D+01
0.4760618059952267D-15	0.5000000000000001D+01
0.3000000000000000D+01	0.4000000000000000D+01
0.3000000000000000D+01	-0.4000000000000000D+01

. Par (INTP) $\epsilon = 1.10^{-13}$

```
-0.5000000000000000D+01-0.9145774141480835D-20
0.3000000000000000D+01 0.4000000000000000D+01
0.3000000000000000D+01-0.4000000000000000D+01
-0.3999999999999971D+01 0.2999999999999930D+01
-0.3999999999999971D+01-0.2999999999999930D+01
0.5000000000000000D+01-0.1421085471520927D-15
-0.2540626493839864D-13 0.5000000000000000D+01
-0.6230135400698871D-13-0.5000000000000000D+01
```

. Par (J.G.M.) $\epsilon = 1.10^{-13}$

```
1 -0.4000000000000000D+01-0.3000000000000000D+01
2 -0.4000000000000000D+01 0.3000000000000000D+01
3 0.3000000000000000D+01 0.4000000000000000D+01
4 0.3000000000000000D+01-0.4000000000000000D+01
5 -0.2392006537606922D-13 0.5000000000000097D+01
6 -0.2392006537606922D-13-0.5000000000000097D+01
7 -0.5000000000000000D+01-0.1125379223378394D-20
8 0.5000000000000000D+01 0.1125379223378394D-20
```

. Par (BAIR) $\epsilon = 1.10^{-13}$

```
-0.5000000000000000D+01 0.0
0.5000000000000000D+01 0.0
-0.4000000000000000D+01 -0.2999999999999999D+01
-0.4000000000000000D+01 0.2999999999999999D+01
-0.3512546594342433D-14 -0.5000000000000000D+01
-0.3512546594342433D-14 0.5000000000000000D+01
0.3000000000000000D+01 -0.4000000000000000D+01
0.3000000000000000D+01 0.4000000000000000D+01
```


. P_{14} : Polynôme du 10ème degré dont les coefficients sont :

1, -55, 1320, -18150, 157 773, -902 055 + 3 416 930 , -8 409 500,
12 753 576, -10 628 640, 3 628 800 .

Racines exactes : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Résultats : Valeurs initiales = 0 .

. Par (NEWS) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.100000000000000000D+01	0.0
0.2000000000000000035D+01	0.0
0.2999999999999999067D+01	0.0
0.400000000000000009068D+01	0.0
0.49999999999999957164D+01	0.0
0.600000000000000109724D+01	0.0
0.6999999999999837161D+01	0.0
0.8000000000000139215D+01	0.0
0.89999999999935565D+01	0.0
0.10000000000001299D+02	0.0

. Par (HAL) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.9999999999999996D+00	0.0
0.200000000000000067D+01	0.0
0.29999999999998090D+01	0.0
0.400000000000019239D+01	0.0
0.49999999999909026D+01	0.0
0.600000000000228720D+01	0.0
0.69999999999678178D+01	0.0
0.80000000000250438D+01	0.0
0.89999999999894751D+01	0.0
0.10000000000002148D+02	0.0

. Par (LAG) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.10000000000000000D+01	0.0
0.200000000000000043D+01	0.0
0.29999999999998226D+01	0.0
0.400000000000020051D+01	0.0
0.49999999999895678D+01	0.0
0.600000000000289103D+01	0.0
0.69999999999544907D+01	0.0
0.80000000000408834D+01	0.0
0.89999999999804747D+01	0.0
0.10000000000003840D+02	0.0

. Par (MUL) $\epsilon = 1.10^{-13}$

1	0.3999999999992913D+01	0.2877505921060489D-11
2	0.49999999999976078D+01	-0.4316258881251753D-11
3	0.6000000000143027D+01	0.4316258882575883D-11
4	0.6999999999695033D+01	-0.2877505922068147D-11
5	0.8000000000332612D+01	0.1233216823503615D-11
6	0.8999999999815472D+01	-0.3083042063173995D-12
7	0.1000000000003946D+02	0.3425602293897660D-13
8	0.1000000000048662D+01	-0.3425602334898350D-13
9	0.1999999999889427D+01	0.3083042068239215D-12
10	0.3000000000067305D+01	-0.1233216823916600D-11

. Par (J4) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.1000000000000000D+01	0.0
0.1999999999999978D+01	0.0
0.30000000000000215D+01	0.0
0.40000000000003577D+01	0.0
0.49999999999957845D+01	0.0
0.60000000000163641D+01	0.0
0.69999999999687035D+01	0.0
0.80000000000316890D+01	0.0
0.8999999999838701D+01	0.0
0.1000000000003211D+02	0.0

. Par (INTP) $\epsilon = 1.10^{-13}$ Valeurs initiales = 0 et 0.5

0.1000000000000000D+01	0.0
0.1999999999999978D+01	0.0
0.30000000000000160D+01	0.0
0.40000000000000104D+01	0.0
0.4999999999996931D+01	0.0
0.60000000000009191D+01	0.0
0.6999999999986538D+01	0.0
0.8000000000010800D+01	0.0
0.899999999996052D+01	0.0
0.1000000000000023D+02	0.0

. Par (J.G.M.) $\epsilon = 1.10^{-13}$

1	0.199999999999999960D+01-0.3986880099505549D-14
2	0.99999999999999994D+00 0.4423120974001979D-15
3	0.4000000000000001821D+01-0.3732421041177784D-13
4	0.49999999999999973171D+01 0.5829048085606434D-13
5	0.300000000000000310D+01 0.1586621927540393D-13
6	0.699999999999999779087D+01-0.7234863029915354D-12
7	0.800000000000237765D+01 0.2079081827218495D-11
8	0.60000000000110093D+01-0.2803834591836673D-13
9	0.899999999999868291D+01-0.1952471160687448D-11
10	0.10000000000002949D+02 0.5916260606612706D-12

. Par (BAIR) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.10000000000000000001D+01	0.0
0.19999999999999999917D+01	0.0
0.3000000000000000001582D+01	0.0
0.3999999999999999987293D+01	0.0
0.50000000000000000034959D+01	0.0
0.5999999999999999944711D+01	0.0
0.70000000000000000040229D+01	0.0
0.799999999999999992335D+01	0.0
0.899999999999999996117D+01	0.0
0.100000000000000000101D+02	0.0

• P₁₅ : Polynôme du 16ème degré dont les coefficients sont :

2.032 531 21 , 3.435 604 8, 25.178 304 8, 37.651 096, 128.218 748,
166.447 68, 345.072 56, 378.908, 524.327, 468.88, 443.576, 304.08,
190.68, 89.6, 32.8, 8, 1.

Proposé par OLVER [40] et repris par WILKINSON [55] .

Racines données par WILKINSON :

- 0. 293 504 529 234 384 7 ±	0. 143 499 296 927 500 5 i
- 0. 224 470 057 879 021 6 ±	0. 450 927 958 301 490 0 i
- 0. 147 623 780 226 670 0 ±	0. 771 757 201 063 852 4 i
- 0. 090 039 988 741 533 1 ±	1. 061 192 059 843 185 i
- 0. 050 864 435 604 355 1 ±	1. 296 911 279 073 319 i
- 0. 025 668 710 501 834 <u>7</u> ±	1. 474 377 143 826 <u>687</u> i
- 0. 010 493 550 094 786 <u>3</u> ±	1. 596 295 495 554 <u>101</u> i
- 0. 002 489 202 445 929 9 ±	1. 667 120 361 217 <u>781</u> i

• Par (MOT) $\epsilon = 1.10^{-12}$

LES RACINES SONT

-0.2566871047019958D-01	0.1474377143895254D+01
-0.2566871047019958D-01	-0.1474377143895254D+01
-0.2244700578339689D+00	-0.4509279583253374D+00
-0.2244700578339689D+00	0.4509279583253374D+00
-0.2935045292579161D+00	-0.1434992969407176D+00
-0.5086443563777720D-01	0.1296911278994230D+01
-0.5086443563777720D-01	-0.1296911278994230D+01
-0.9003998870684880D-01	0.1061192059914902D+01
-0.9003998870684880D-01	-0.1061192059914902D+01
-0.1476237802671676D+00	0.7717572010096774D+00
-0.1476237802671676D+00	-0.7717572010096774D+00
-0.2935045292560972D+00	0.1434992969407176D+00
-0.2489202437573112D-02	-0.1667120361227717D+01
-0.2489202437573112D-02	0.1667120361227717D+01
-0.1049355011855368D-01	-0.1596295495515733D+01
-0.1049355011739556D-01	0.1596295495515733D+01

. Par (NEWS) $\epsilon = 1.10^{-12}$

-0.2244700578790215D+00	0.4509279583014902D+00
-0.2244700578790215D+00	-0.4509279583014902D+00
-0.1476237802266757D+00	0.7717572010638487D+00
-0.1476237802266757D+00	-0.7717572010638487D+00
-0.2935045292343929D+00	-0.1434992969274970D+00
-0.2935045292343929D+00	0.1434992969274970D+00
-0.9003998874134570D-01	0.1061192059843295D+01
-0.9003998874134570D-01	-0.1061192059843295D+01
-0.5086443560508632D-01	0.1296911279073103D+01
-0.5086443560508632D-01	-0.1296911279073103D+01
-0.2566871050034798D-01	0.1474377143826570D+01
-0.2566871050034798D-01	-0.1474377143826570D+01
-0.2489202445227289D-02	0.1667120361217340D+01
-0.2489202445227289D-02	-0.1667120361217340D+01
-0.1049355009641906D-01	0.1596295495554776D+01
-0.1049355009641919D-01	-0.1596295495554776D+01

. Par (LAG) $\epsilon = 1.10^{-12}$

-0.2244700578790218D+00	-0.4509279583014904D+00
-0.2244700578790218D+00	0.4509279583014904D+00
-0.1476237802266750D+00	-0.7717572010638509D+00
-0.1476237802266750D+00	0.7717572010638509D+00
-0.9003998874147050D-01	-0.1061192059843179D+01
-0.9003998874147050D-01	0.1061192059843179D+01
-0.5086443560473519D-01	-0.1296911279073480D+01
-0.5086443560473519D-01	0.1296911279073480D+01
-0.2566871050069632D-01	-0.1474377143825987D+01
-0.2566871050069632D-01	0.1474377143825987D+01
-0.1049355009639261D-01	-0.159629549555276D+01
-0.1049355009639261D-01	0.159629549555276D+01
-0.2489202445140415D-02	-0.1667120361217156D+01
-0.2489202445140415D-02	0.1667120361217156D+01
-0.2935045292343872D+00	-0.1434992969274929D+00
-0.2935045292343872D+00	0.1434992969274928D+00

. Par (MUL)

$$\varepsilon = 1.10^{-12}$$

1	-0.1476237802266733D+00	0.7717572010638519D+00
2	-0.1476237802266733D+00	-0.7717572010638519D+00
3	-0.2244700578790195D+00	0.4509279583014891D+00
4	-0.2244700578790195D+00	-0.4509279583014891D+00
5	-0.2935045292343840D+00	0.1434992969274869D+00
6	-0.2935045292343840D+00	-0.1434992969274869D+00
7	-0.9003998874151890D-01	0.1061192059843227D+01
8	-0.9003998874151890D-01	-0.1061192059843227D+01
9	-0.2566871050111580D-01	0.1474377143826412D+01
10	-0.2566871050111580D-01	-0.1474377143826412D+01
11	-0.1049355009988281D-01	0.1596295495562375D+01
12	-0.1049355009988281D-01	-0.1596295495562375D+01
13	-0.2489202442266728D-02	0.1667120361211648D+01
14	-0.2489202442266728D-02	-0.1667120361211648D+01
15	-0.5086443560365533D-01	0.1296911279071291D+01
16	-0.5086443560365533D-01	-0.1296911279071291D+01

. Par (J4)

$$\varepsilon = 1.10^{-12}$$

-0.2244700578790219D+00	0.4509279583014906D+00
-0.2244700578790219D+00	-0.4509279583014906D+00
-0.1476237802266740D+00	0.7717572010638480D+00
-0.1476237802266740D+00	-0.7717572010638480D+00
-0.9003998874146200D-01	0.1061192059843192D+01
-0.9003998874146200D-01	-0.1061192059843192D+01
-0.2935045292343869D+00	0.1434992969275000D+00
-0.2935045292343869D+00	-0.1434992969275000D+00
-0.5086443560471090D-01	0.1296911279073503D+01
-0.5086443560471090D-01	-0.1296911279073503D+01
-0.2566871050088448D-01	0.1474377143825813D+01
-0.2566871050088448D-01	-0.1474377143825813D+01
-0.2489202445333109D-02	0.1667120361217026D+01
-0.2489202445333109D-02	-0.1667120361217026D+01
-0.1049355009604855D-01	0.159629549555551D+01
-0.1049355009603798D-01	-0.159629549555551D+01

. Par (INTP) $\epsilon = 1.10^{-12}$

```

-0.2244700578790212D+00 0.4509279583014900D+00
-0.2244700578790212D+00-0.4509279583014900D+00
-0.2935045292343899D+00 0.1434992969275426D+00
-0.2935045292343899D+00-0.1434992969275426D+00
-0.1476237802266551D+00 0.7717572010637829D+00
-0.1476237802266551D+00-0.7717572010637829D+00
-0.9003998874152350D-01 0.1061192059843358D+01
-0.9003998874152350D-01-0.1061192059843358D+01
-0.5086443560454602D-01 0.1296911279073121D+01
-0.5086443560454602D-01-0.1296911279073121D+01
-0.2566871050121111D-01 0.1474377143826541D+01
-0.2566871050121111D-01-0.1474377143826541D+01
-0.1049355009568421D-01 0.15962954955554726D+01
-0.1049355009568421D-01-0.15962954955554726D+01
-0.2489202445485165D-02 0.1667120361217383D+01
-0.2489202445485165D-02-0.1667120361217383D+01

```

. Par (JARP) $\epsilon = 1.10^{-12}$

```

-0.2244700578790216D+00 0.4509279583014903D+00
-0.2244700578790216D+00-0.4509279583014903D+00
-0.2935045292343844D+00-0.1434992969275006D+00
-0.2935045292343844D+00 0.1434992969275006D+00
-0.1476237802266757D+00 0.7717572010638474D+00
-0.1476237802266757D+00-0.7717572010638474D+00
-0.9003998874147750D-01 0.1061192059843193D+01
-0.9003998874147750D-01-0.1061192059843193D+01
-0.5086443560466998D-01 0.1296911279073457D+01
-0.5086443560466998D-01-0.1296911279073457D+01
-0.1049355009597774D-01 0.1596295495555431D+01
-0.1049355009597774D-01-0.1596295495555431D+01
-0.2489202445362953D-02 0.1667120361217057D+01
-0.2489202445362953D-02-0.1667120361217057D+01
-0.2566871050097459D-01 0.1474377143825851D+01
-0.2566871050097459D-01-0.1474377143825851D+01

```


Par (J.G.M.)

$$\epsilon = 1.10^{-12}$$

1	-0.2935045292343849D+00	-0.1434992969275003D+00
2	-0.2935045292343849D+00	0.1434992969275003D+00
3	-0.1476237802266771D+00	0.7717572010638524D+00
4	-0.1476237802266771D+00	-0.7717572010638524D+00
5	-0.2244700578790212D+00	0.4509279583014909D+00
6	-0.2244700578790212D+00	-0.4509279583014909D+00
7	-0.5086443560493858D-01	0.1296911279073718D+01
8	-0.5086443560493858D-01	-0.1296911279073718D+01
9	-0.9003998874142580D-01	0.1061192059843121D+01
10	-0.9003998874142580D-01	-0.1061192059843121D+01
11	-0.1049355009635045D-01	0.1596295495556135D+01
12	-0.1049355009635045D-01	-0.1596295495556135D+01
13	-0.2566871050048410D-01	0.1474377143825357D+01
14	-0.2566871050048410D-01	-0.1474377143825357D+01
15	-0.2489202445234241D-02	0.1667120361216741D+01
16	-0.2489202445234241D-02	-0.1667120361216741D+01

Par (BAIR)

$$\epsilon = 1.10^{-12}$$

-0.2935045292343848D+00	-0.1434992969275004D+00
-0.2935045292343848D+00	0.1434992969275004D+00
-0.2244700578790217D+00	-0.4509279583014905D+00
-0.2244700578790217D+00	0.4509279583014905D+00
-0.1476237802266760D+00	-0.7717572010638475D+00
-0.1476237802266760D+00	0.7717572010638475D+00
-0.9003998874145440D-01	-0.1061192059843201D+01
-0.9003998874145440D-01	0.1061192059843201D+01
-0.5086443560477500D-01	-0.1296911279073366D+01
-0.5086443560477500D-01	0.1296911279073366D+01
-0.2566871050074845D-01	-0.1474377143826329D+01
-0.2566871050074845D-01	0.1474377143826329D+01
-0.1049355009614989D-01	-0.1596295495554757D+01
-0.1049355009614989D-01	0.1596295495554757D+01
0.2489202445306339D-02	-0.1667120361217426D+01
-0.2489202445306339D-02	0.1667120361217426D+01

$$P_{16} : z^{20} + z^{16} + 391 z^{12} - 8789 z^8 - 31604 z^4 + 40\,000 = 0$$

Proposé par DURAND [13]

Les racines se répartissent de la manière suivante :



Résultats :

Par (LAG) $\varepsilon = 1.10^{-12}$

LES RACINES TROUVEES SONT

```

0.0                                0.1000000000000000D+01
0.0                                -0.1000000000000000D+01
0.1000000000000000D+01 0.1000000000000000D+01
0.1000000000000000D+01 -0.1000000000000000D+01
0.1000000000000000D+01 0.1262177448353619D-27
-0.1000000000000000D+01 -0.6310887241768094D-27
-0.1000000000000000D+01 0.1000000000000000D+01
-0.1000000000000000D+01 -0.1000000000000000D+01
0.1938704560671158D-25 0.2000000000000000D+01
0.1938704560671158D-25 -0.2000000000000000D+01
0.1000000000000000D+01 0.2000000000000000D+01
0.1000000000000000D+01 -0.2000000000000000D+01
0.2000000000000000D+01 0.1000000000000000D+01
0.2000000000000000D+01 -0.1000000000000000D+01
0.2000000000000000D+01 0.2064642808932357D-20
-0.1000000000000000D+01 0.2000000000000000D+01
-0.1000000000000000D+01 -0.2000000000000000D+01
-0.1999999999999999D+01 0.9999999999999999D+00
-0.1999999999999999D+01 -0.9999999999999999D+00
-0.2000000000000000D+01 0.0

```


. Par (MUL) $\epsilon = 1.10^{-12}$

1	0.0	0.1000000000000000D+01
2	0.0	-0.1000000000000000D+01
3	0.1000000000000000D+01	0.1000000000000000D+01
4	0.1000000000000000D+01	-0.1000000000000000D+01
5	0.1000000000000000D+01	0.3419920283412064D-23
6	-0.1000000000000000D+01	-0.1000000000000000D+01
7	-0.1000000000000000D+01	0.1000000000000000D+01
8	-0.1000000000000000D+01	0.2950343555337602D-16
9	-0.2000000000000000D+01	-0.2650127352521975D-16
10	0.9391781444141311D-15	-0.1999999999999997D+01
11	0.9391781444141311D-15	0.1999999999999997D+01
12	0.999999999999986D+00	-0.1999999999999999D+01
13	0.999999999999986D+00	0.1999999999999999D+01
14	0.199999999999992D+01	-0.1000000000000001D+01
15	0.199999999999992D+01	0.1000000000000001D+01
16	0.2000000000000033D+01	0.1269094821189336D-15
17	-0.9999999999997497D+00	-0.1999999999999872D+01
18	-0.9999999999997497D+00	0.1999999999999872D+01
19	-0.2000000000000259D+01	-0.10000000000000531D+01
20	-0.2000000000000259D+01	0.10000000000000531D+01

. Par (J.G.M.) $\epsilon = 1.10^{-12}$

1	0.1000000000000000D+01	0.1000000000000000D+01
2	0.1000000000000000D+01	-0.1000000000000000D+01
3	-0.9999999999997797D+00	-0.1621752675863086D-12
4	-0.5576238408312139D-13	-0.9999999999998911D+00
5	-0.5576238408312139D-13	0.9999999999998911D+00
6	0.999999999999263D+00	0.1394947390020648D-13
7	-0.1000000000000003D+01	-0.999999999999224D+00
8	-0.1000000000000003D+01	0.999999999999224D+00
9	0.99999999999979D+00	0.20000000000000011D+01
10	0.99999999999979D+00	-0.20000000000000011D+01
11	-0.19999999999970D+01	0.8545505658315072D-13
12	0.2000000000000000D+01	-0.2369624118387333D-14
13	-0.1000000000000000D+01	0.1999999999999999D+01
14	-0.1000000000000000D+01	-0.1999999999999999D+01
15	-0.2184123474029984D-13	0.20000000000000014D+01
16	-0.2184123474029984D-13	-0.20000000000000014D+01
17	-0.20000000000000048D+01	-0.999999999999676D+00
18	-0.20000000000000048D+01	0.999999999999676D+00
19	0.19999999999978D+01	0.1000000000000209D+01
20	0.19999999999978D+01	-0.1000000000000209D+01

. Par (BAIR)

$$\varepsilon = 1.10^{-12}$$

-0.1000000000000000D+01	0.0
0.2000000000000000D+01	0.0
0.1303549116750066D-16	-0.1000000000000000D+01
0.1303549116750066D-16	0.1000000000000000D+01
-0.2000000000000000D+01	0.0
0.1000000000000000D+01	0.0
-0.5272805821930166D-16	-0.2000000000000000D+01
-0.5272805821930166D-16	0.2000000000000000D+01
-0.999999999999999D+00	-0.999999999999997D+00
-0.999999999999999D+00	0.999999999999997D+00
0.999999999999998D+00	-0.1000000000000000D+01
0.999999999999998D+00	0.1000000000000000D+01
-0.1999999999999963D+01	-0.99999999999990712D+00
-0.1999999999999963D+01	0.99999999999990712D+00
0.99999999999986788D+00	-0.20000000000002339D+01
0.99999999999986788D+00	0.20000000000002339D+01
-0.10000000000001748D+01	-0.20000000000000011D+01
-0.10000000000001748D+01	0.20000000000000011D+01
0.20000000000002733D+01	-0.10000000000001449D+01
0.20000000000002733D+01	0.10000000000001449D+01

- P₁₇ : Polynôme du 36ème degré avec coefficients à 5 chiffres significatifs pris au hasard (Proposé par HENRICI [17])

Coefficients : -9265.3, 6468.0, -42.015, 70.311, 3072.4, 2.9530, 5.6163,
870.73, -7.9141, -74.110, -22.964, 9.2252, -2.4987, -39.063,
6.5810, -6.8461, -7.8867, -32.151, -34.637, 67.916, -390.57,
60.247, 265.74, -453.86, -7015.6, -309.67, -2.0574, -85.581,
-99.394, -20.775, 49.225, 3924.5, -0.083830, 73.941, 0.049 060,
88.312, -993.56

Les résultats fournis par [17] n'ont que six chiffres significatifs :

0.81276	±	0.061480	i	,	-0.58720	±	0.48197	i	,	0.22083	±	0.700000	i
-0.88460	±	0.30152	i	,	0.63308	±	0.69314	i	,	-0.20948	±	0.899.96	i
-0.072582	±	0.99088	i	,	0.57888	±	0.77201	i	,	-0.583111	±	0.78522	i
0.15853	±	1.0003	i	,	0.82646	±	0.57735	i	,	-0.98285	±	0.11248	i
0.39262	±	0.92500	i	,	0.95385	±	0.36071	i	,	-0.74665	±	0.60412	i
-0.37723	±	0.89807	i	.	1.0530	±	0.087703	i	,	-0.83729	±	0.39630	i

Résultats :

(voir page suivante)

. Par (LAG)

$$\epsilon = 1.10^{-10}$$

0.8127598822973474D+00-0.6147974641207274D-01
0.8127598822973474D+00-0.6147974641207274D-01
0.2208328177557138D+00-0.7000044671195141D+00
0.2208328177557138D+00 0.7000044671195141D+00
-0.2094825010569958D+00-0.8999616203424601D+00
-0.2094825010569958D+00 0.8999616203424601D+00
-0.3772294486822838D+00-0.8980728714458937D+00
-0.3772294486822838D+00 0.8980728714458937D+00
-0.5831113093215677D+00-0.7852246824487629D+00
-0.5831113093215677D+00 0.7852246824487629D+00
-0.7466486855989064D+00-0.6041234511097485D+00
-0.7466486855989064D+00 0.6041234511097485D+00
-0.8372852532272543D+00-0.3962960915826831D+00
-0.8372852532272543D+00 0.3962960915826831D+00
-0.8845981101347782D+00-0.3015196624878823D+00
-0.8845981101347761D+00 0.3015196624878820D+00
-0.9828508293041608D+00-0.1124801357472229D+00
-0.9828508293041616D+00 0.1124801357472240D+00
-0.5871954694441292D+00-0.4819686406542049D+00
-0.5871954694441294D+00 0.4819686406542034D+00
-0.7258235770374790D-01-0.9908757214508085D+00
-0.7258235770374030D-01 0.9908757214508086D+00
0.1585296127449300D+00-0.1000329321155792D+01
0.1585296127449921D+00 0.1000329321155742D+01
0.3926236739841137D+00-0.9249986412920291D+00
0.3926236739841321D+00 0.9249986412924274D+00
0.5788786350405674D+00-0.7720099987230189D+00
0.5788786350380575D+00 0.7720099987149981D+00
0.6330847695948793D+00-0.6931412365585946D+00
0.6330847695986831D+00 0.6931412365724844D+00
0.8264593742575443D+00-0.5773500166939749D+00
0.8264593742640331D+00 0.5773500166862314D+00
0.9538469053757991D+00-0.3607127224454650D+00
0.9538469053623430D+00 0.3607127224411914D+00
0.1053012576932948D+01-0.8770370330574460D-01
0.1053012576937363D+01 0.8770370331154430D-01

. Par (MUL)

$$\varepsilon = 1.10^{-10}$$

1	-0.5871954694441242D+00	0.4819686406542050D+00
2	-0.5871954694441242D+00	-0.4819686406542050D+00
3	0.2208328177557137D+00	-0.7000044671195129D+00
4	0.2208328177557137D+00	0.7000044671195129D+00
5	0.6330847695957317D+00	-0.6931412365679399D+00
6	0.6330847695957317D+00	0.6931412365679399D+00
7	0.5788786350404843D+00	-0.7720099987184846D+00
8	0.5788786350404843D+00	0.7720099987184846D+00
9	0.8127598822973537D+00	0.6147974641207186D-01
10	0.8127598822973537D+00	-0.6147974641207186D-01
11	-0.2094825010569728D+00	0.8999616203424309D+00
12	-0.2094825010569728D+00	-0.8999616203424309D+00
13	-0.3772294486822642D+00	0.8980728714459026D+00
14	-0.3772294486822642D+00	-0.8980728714459026D+00
15	-0.5831113093215501D+00	0.7852246824487692D+00
16	-0.5831113093215501D+00	-0.7852246824487692D+00
17	-0.7466486855988739D+00	0.6041234511097571D+00
18	-0.7466486855988739D+00	-0.6041234511097571D+00
19	-0.8372852532271510D+00	0.3962960915827818D+00
20	-0.8372852532271510D+00	-0.3962960915827818D+00
21	-0.8845981101349199D+00	0.3015196624879478D+00
22	-0.8845981101349199D+00	-0.3015196624879478D+00
23	-0.9828508293042123D+00	0.1124801357472212D+00
24	-0.9828508293042125D+00	-0.1124801357472210D+00
25	0.1585296127445377D+00	-0.1000329321155786D+01
26	0.1585296127445377D+00	0.1000329321155786D+01
27	0.3926236739840906D+00	-0.9249986412923940D+00
28	0.3926236739840906D+00	0.9249986412923940D+00
29	0.9538469053807442D+00	-0.3607127224317251D+00
30	0.9538469053807442D+00	0.3607127224317251D+00
31	0.1053012576924460D+01	-0.8770370330643910D-01
32	0.1053012576924460D+01	0.8770370330643910D-01
33	0.8264593742600758D+00	-0.5773500166939902D+00
34	0.8264593742600758D+00	0.5773500166939902D+00
35	-0.7258235770368440D-01	-0.9908757214506872D+00
36	-0.7258235770368440D-01	0.9908757214506872D+00

. Par (J.G.M.)

$$\epsilon = 1.10^{-10}$$

1	0.2208328177557138D+00	0.7000044671195140D+00
2	0.2208328177557138D+00	-0.7000044671195140D+00
3	-0.5871954694441246D+00	0.4819686406542067D+00
4	-0.5871954694441246D+00	-0.4819686406542067D+00
5	0.1053012576933870D+01	-0.8770370332529030D-01
6	0.1053012576933870D+01	0.8770370332529030D-01
7	-0.8372852532272570D+00	-0.3962960915826891D+00
8	-0.8372852532272570D+00	0.3962960915826891D+00
9	-0.2094825010569970D+00	0.8999616203424633D+00
10	-0.2094825010569970D+00	-0.8999616203424633D+00
11	0.8127598823004021D+00	0.6147974641698841D-01
12	0.8127598823004021D+00	-0.6147974641698841D-01
13	0.5788786350360391D+00	0.7720099987193359D+00
14	0.5788786350360391D+00	-0.7720099987193359D+00
15	-0.8845981101352190D+00	-0.3015196624882505D+00
16	-0.8845981101352190D+00	0.3015196624882505D+00
17	0.6330847695966979D+00	0.6931412365700491D+00
18	0.6330847695966979D+00	-0.6931412365700491D+00
19	-0.3772294486808042D+00	-0.8980728714466906D+00
20	-0.3772294486808042D+00	0.8980728714466906D+00
21	-0.7466486855995913D+00	-0.6041234511101088D+00
22	-0.7466486855995913D+00	0.6041234511101088D+00
23	0.1585296127456016D+00	0.1000329321153179D+01
24	0.1585296127456016D+00	-0.1000329321153179D+01
25	0.8264593742595311D+00	0.5773500166921985D+00
26	0.8264593742595311D+00	-0.5773500166921985D+00
27	-0.7258235770159880D-01	-0.9908757214505211D+00
28	-0.7258235770159880D-01	0.9908757214505211D+00
29	-0.9828508293046360D+00	0.1124801357471890D+00
30	-0.9828508293046360D+00	-0.1124801357471890D+00
31	0.9538469053719205D+00	-0.3607127224367749D+00
32	0.9538469053719205D+00	0.3607127224367749D+00
33	-0.5831113093219245D+00	-0.7852246824502178D+00
34	-0.5831113093219245D+00	0.7852246824502178D+00
35	0.3926236739818143D+00	0.9249986412896172D+00
36	0.3926236739818143D+00	-0.9249986412896172D+00

. Par (BAIR)

$$\epsilon = 1.10^{-10}$$

-0.9828508293014948D+00	-0.1124801357500996D+00
-0.9828508293014948D+00	0.1124801357500996D+00
0.2208328177684054D+00	-0.7000044669135266D+00
0.2208328177684054D+00	0.7000044669135266D+00
0.1053012576927342D+01	-0.8770370332994130D-01
0.1053012576927342D+01	0.8770370332994130D-01
-0.3772294486741889D+00	-0.8980728714437204D+00
-0.3772294486741889D+00	0.8980728714437204D+00
0.8127598821744617D+00	-0.6147974602881996D-01
0.8127598821744617D+00	0.6147974602881996D-01
-0.5871954693229587D+00	-0.4819686405544169D+00
-0.5871954693229587D+00	0.4819686405544169D+00
-0.2094825010348765D+00	-0.8999616203237416D+00
-0.2094825010348765D+00	0.8999616203237416D+00
0.1585296127497030D+00	-0.1000329321158921D+01
0.1585296127497030D+00	0.1000329321158921D+01
-0.8372852531986216D+00	-0.3962960915958686D+00
-0.8372852531986216D+00	0.3962960915958686D+00
0.6330847695463401D+00	-0.6931412365767360D+00
0.6330847695463401D+00	0.6931412365767360D+00
0.5788786350345048D+00	-0.7720099986875876D+00
0.5788786350345048D+00	0.7720099986875876D+00
-0.8845981101363124D+00	-0.3015196625117556D+00
-0.8845981101363124D+00	0.3015196625117556D+00
0.9538469053958967D+00	-0.3607127224368039D+00
0.9538469053958967D+00	0.3607127224368039D+00
0.3926236739603614D+00	-0.9249986412883299D+00
0.3926236739603614D+00	0.9249986412883299D+00
-0.5831113093107059D+00	-0.7852246824280753D+00
-0.5831113093107059D+00	0.7852246824280753D+00
-0.7258235770095570D-01	-0.9908757214261772D+00
-0.7258235770095570D-01	0.9908757214261772D+00
-0.7466486855985984D+00	-0.6041234511323300D+00
-0.7466486855985984D+00	0.6041234511323300D+00
0.8264593742311357D+00	-0.5773500167038809D+00
0.8264593742311357D+00	0.5773500167038809D+00

ANNEXE 2

$$\cdot P_{21} : z^5 - 3z^4 - (2+i)z^3 + (12+5i)z^2 - (8+8i)z + 4i = 0$$

Proposé par DIMSDALE [12]

Les racines sont :

$$0.098\ 684\ 113\ 467\ 810\ \underline{0} + 0.455\ 089\ 860\ 562\ 227\ \underline{4}\ i$$

1, 2, 2

$$-2.098\ 684\ 113\ 467\ 810\ \underline{0} - 0.455\ 089\ 860\ 562\ 227\ \underline{4}\ i$$

Résultats : Valeurs initiales = 0

$$\cdot \text{Par (LEHM)} \quad \epsilon = 1.10^{-5}$$

LES RACINES SONT

0.9868411346781000D-01	0.4550898605622274D+00
0.9999999999999999D+00	-0.2284036483943290D-15
0.1999988604880354D+01	0.1080736668325658D-10
0.2000011395088350D+01	-0.7332525116585829D-11
-0.2098684113436515D+01	-0.4550898605657019D+00

$$\cdot \text{Par (MOT)} \quad \epsilon = 1.10^{-13}$$

0.9868411346781160D-01	0.4550898605622251D+00
0.1000000000000000D+01	0.0
0.2000000000000000D+01	0.0
0.2000000000000000D+01	0.0
-0.2098684113467812D+01	-0.4550898605622251D+00

. Par (NEWS) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.9868411346781000D-01	0.4550898605622273D+00
0.1000000000000000D+01	-0.1594441860941510D-15
0.1999999777878342D+01	-0.2721921687468441D-06
0.2000000222121660D+01	0.2721921386442410D-06
-0.2098684113467812D+01	-0.4550898605621971D+00

. Par (NP) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.9868411346781090D-01	0.4550898605622287D+00
0.9999999999999964D+00	-0.3461328886960539D-14
0.1999999999895812D+01	0.1447921670934141D-09
0.2000000000104189D+01	-0.1447907870150851D-09
-0.2098684113467809D+01	-0.4550898605622266D+00

REMARQUES:

NOUS POUVONS CONSIDERER QUE
 Z = 0.2000000000000001D+01 0.6900391644922605D-15
 EST RACINE DE MULTIPLICITE 2

. Par (HAL) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.9868411346781000D-01	0.4550898605622274D+00
0.9999999999999987D+00	0.4070033545621908D-15
0.1999999833089696D+01	0.3268342147607772D-07
0.2000000166910298D+01	-0.3268341838483033D-07
-0.2098684113467803D+01	-0.4550898605622308D+00

. Par (LAGP) $\epsilon = 1.10^{-13}$

Multiplicité
trouvée

0.9868411346781000D-01	0.4550898605622274D+00
0.999999999999998D+00	-0.2402355903793830D-15
0.20000000000001022D+01	0.4560604145850341D-12
0.20000000000001022D+01	-0.4560604145850341D-12
-0.2098684113469853D+01	-0.4550898605622271D+00

2

. Par (MUL) $\epsilon = 1.10^{-13}$

```

1      0.1000000000000000D+01-0.9034138187222680D-16
2      0.19999999999523177D+01-0.3741953398687675D-07
3      0.20000000030476823D+01 0.3741953222854626D-07
4      0.9868411346780870D-01 0.4550898605622293D+00
5      -0.2098684113467809D+01-0.4550898605622275D+00

```

. Par (J4) $\epsilon = 1.10^{-13}$

```

0.9868411346781000D-01 0.4550898605622273D+00
0.1000000000000000D+01 -0.7986359770366753D-16
0.19999999892538624D+01 -0.8517427813712398D-07
0.2000000107461374D+01 0.8517427387855973D-07
-0.2098684113467808D+01 -0.4550898605622230D+00

```

. Par (INTP) $\epsilon = 1.10^{-13}$ V.I. = 0 et 0.5

Multiplicité
trouvée

```

0.2000000000967847D+01 0.1149866818986550D-08
0.1000000000000000D+01-0.3000233894546319D-15
0.9868411346780960D-01 0.4550898605622276D+00
0.1999999999032152D+01-0.1149866702256882D-08
-0.2098684113467810D+01-0.4550898605622274D+00

```

2

En utilisant les résultats de I.2., nous obtenons $z = 2.0$ de multiplicité 2.

. Par (J.G.M) $\epsilon = 1.10^{-13}$

```

1      0.9868411346782460D-01 0.4550898605622161D+00
2      0.999999999999999682D+00 0.4817308881579227D-13
3      0.2000000003336668D+01-0.6383475724053690D-08
4      0.1999999996663347D+01 0.6383443878945277D-08
5      -0.2098684113467808D+01-0.4550898605622324D+00

```


$$\cdot \underline{P_{22} : z^6 + 3z^4 + 3z^2 + 1 = 0}$$

Proposé par WOZNIAKOWSKI [57]

Les racines sont : $i, i, i, -i, -i, -i$.

Résultats :

• Par (LEHM) $\epsilon = 1.10^{-5}$

LES RACINES SONT

-0.2776322274508821D-03	0.1000604057872490D+01
-0.3845700274684381D-03	0.9994572996403057D+00
0.6622019128860236D-03	0.9999386426597757D+00
-0.1431740305349343D-02	-0.1001070893510785D+01
-0.2115059428720814D-03	-0.9982247396809551D+00
0.1643246590254937D-02	-0.1000704366980830D+01

• Par (NEWS) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.0	0.9999819134517080D+00
0.0	-0.9999819134517080D+00
0.0	0.1000002472539288D+01
0.0	-0.1000002472539288D+01
0.0	0.1000015613720493D+01
0.0	-0.1000015613720493D+01

• Par (NP) $\epsilon = 1.10^{-13}$

Multiplicité
trouvée

0.0	0.10000000073037017D+01	3
0.0	-0.10000000073037017D+01	3
0.0	0.10000000073037017D+01	
0.0	-0.10000000073037017D+01	
0.0	0.9999998539259513D+00	
0.0	-0.9999998539259513D+00	

En appliquant les résultats du I.2., nous trouvons :

$$z = 0. \pm 0.999\,999\,999\,999\,995\,i$$

. Par (LAGP)

$$\epsilon = 1.10^{-13}$$

Multiplicité
trouvée

0.0	-0.9999999999993520D+00	3
0.0	0.9999999999993520D+00	3
0.0	-0.9999999999993520D+00	
0.0	0.9999999999993520D+00	
0.0	-0.9999999999993520D+00	
0.0	0.9999999999993520D+00	

. Par (J4)

$$\epsilon = 1.10^{-13}$$

0.0	0.9999770194131993D+00
0.0	-0.9999770194131993D+00
0.0	0.9999896209147761D+00
0.0	-0.9999896209147761D+00
0.0	0.1000033358797703D+01
0.0	-0.1000033358797703D+01

. Par (INTP)

$$\epsilon = 1.10^{-13}$$

0.0	0.1000001815852861D+01
0.0	-0.1000001815852861D+01
0.0	0.9999992615558484D+00
0.0	-0.9999992615558484D+00
0.0	0.9999989225887594D+00
0.0	-0.9999989225887594D+00

En utilisant I.2., nous trouvons :

$$z = 0. \pm 0.999\ 999\ 999\ 999\ 1\ i \text{ racine de multiplicité } 3.$$

. Par (JARP)

$$\epsilon = 1.10^{-13}$$

0.0	0.9999999747036283D+00
0.0	-0.9999999747036283D+00
0.0	0.9999999747036283D+00
0.0	-0.9999999747036283D+00
0.0	0.1000000050592741D+01
0.0	-0.1000000050592741D+01

En utilisant I.2., nous trouvons :

$$z = 0. \pm 0.999\ 999\ 999\ 999\ 2\ i \text{ racine de multiplicité } 3.$$

. Par (J.G.M.)

$$\epsilon = 1.10^{-13}$$

1	0.0	0.1000000000000000D+01
2	0.0	-0.1000000000000000D+01
3	0.0	0.1000000000000000D+01
4	0.0	-0.1000000000000000D+01
5	0.0	0.1000000000000000D+01
6	0.0	-0.1000000000000000D+01

. Par (BAIR)

$$\epsilon = 1.10^{-13}$$

0.0	-0.9999968647711451D+00
0.0	0.9999968647711451D+00
0.0	-0.9999984199747067D+00
0.0	0.9999984199747067D+00
0.0	-0.1000001970327210D+01
0.0	0.1000001970327210D+01

. Par (HAL)

$$\epsilon = 1.10^{-13}$$

0.9993928354119347D+00	0.0
0.1000608372508645D+01	0.0
0.9996469589413146D+00	0.0
0.1000353975325896D+01	0.0
0.1985664262323553D+01	0.0
0.2010706708645740D+01	0.0
0.2004041928838633D+01	0.0
0.2981646586726599D+01	0.0
0.3018020724060467D+01	0.0
0.3999917647217213D+01	0.0

. Par (LAGP)

$$\epsilon = 1.10^{-11}$$

Multiplicité
trouvée

0.9999992110571788D+00	4
0.9999992110571788D+00	
0.9999992110571788D+00	
0.1000002366844617D+01	
0.1999999161943475D+01	3
0.1999999161943475D+01	
0.2000001676052496D+01	
0.3000000024895016D+01	2
0.2999999975183522D+01	
0.3999999999965860D+01	

$z_1 = 1.000\ 000\ 000\ 004$	est racine de multiplicité 4
$z_2 = 1.999\ 999\ 999\ 98$	- - - - 3
$z_3 = 3.000\ 000\ 000\ 02$	- - - - 2

. Par (MUL)

$$\epsilon = 1.10^{-11}$$

1	0.9999426921657223D+00	0.8037177314586429D-03
2	0.1000055592693573D+01	-0.8043237928922574D-03
3	0.1000804881602874D+01	0.5675481348338324D-04
4	0.9991968335522504D+00	-0.5614874287311643D-04
5	0.1999804684883995D+01	-0.5273896589196135D-03
6	0.1999640606869012D+01	0.4324730103276220D-03
7	0.2000554708933933D+01	0.9491702419340825D-04
8	0.3000018394149980D+01	0.3725458928727037D-05
9	0.2999981605179503D+01	-0.3725866090871570D-05
10	0.3999999999969153D+01	0.2238407542880188D-10

. Par (J4)

$$\epsilon = 1.10^{-11}$$

0.9991326007074679D+00	0.0
0.1000869238839777D+01	0.0
0.9997662036503681D+00	0.0
0.1000235462599360D+01	0.0
0.1983112348628592D+01	0.0
0.2004291532586860D+01	0.0
0.2013180024100932D+01	0.0
0.2978137384116670D+01	0.0
0.3021391551409066D+01	0.0
0.3999883653360902D+01	0.0

. Par (INTP)

$$\epsilon = 1.10^{-11}$$

V.I. = 0 et 0.5

Multiplicité trouvée

0.1000003500772015D+01	0.0	4
0.1000003500772015D+01	0.0	
0.1000003500772015D+01	0.0	
0.9999894980025776D+00	0.0	
0.1999992274517079D+01	0.0	3
0.1999992274517079D+01	0.0	
0.2000015450091226D+01	0.0	
0.3000001266473349D+01	0.0	2
0.2999998734574272D+01	0.0	
0.3999999999508367D+01	0.0	

En utilisant I.2. nous trouvons :

$z_1 = 1.000\ 000\ 000\ 07$	de multiplicité 4
$z_2 = 1.999\ 999\ 999\ 7$	de multiplicité 3
$z_3 = 3.000\ 000\ 000\ 5$	de multiplicité 2

. Par (JARP)

$$\epsilon = 1.10^{-11}$$

V.I. = 0 et 0.5

Multiplicité trouvée

0.9999994981576406D+00	0.0	4
0.9999994981576406D+00	0.0	
0.9999994981576406D+00	0.0	
0.1000001505533806D+01	0.0	
0.1999999215038391D+01	0.0	3
0.1999999215038391D+01	0.0	
0.2000001569900715D+01	0.0	
0.3000000024064610D+01	0.0	2
0.2999999975926297D+01	0.0	
0.40000000000024863D+01	0.0	

En utilisant I.2., nous trouvons :

$z_1 = 1.000\ 000\ 000\ 002$	de multiplicité 4
$z_2 = 1.999\ 999\ 999\ 992$	de multiplicité 3
$z_3 = 2.999\ 999\ 999\ 995$	de multiplicité 2

. Par (J.G.M.)

$$\epsilon = 1.10^{-11}$$

1	0.10000 <u>1</u> 7150647533D+01	0.2564642541639378D-04
2	0.10000 <u>1</u> 7150647533D+01-0.2564642541639378D-04	
3	0.9999 <u>8</u> 30882581414D+00-0.1375032961691610D-06	
4	0.19999 <u>4</u> 818508177D+01-0.1563218161332043D-05	
5	0.19999 <u>4</u> 818508177D+01	0.1563218161332043D-05
6	0.9999 <u>8</u> 26102974467D+00	0.1375031428143869D-06
7	0.2999999 <u>9</u> 30136154D+01	0.6014225163620428D-06
8	0.20000 <u>1</u> 0363375430D+01-0.2548816125064017D-12	
9	0.30000000 <u>6</u> 9536732D+01-0.6014216961100585D-06	
10	0.400000000000 <u>8</u> 4672D+01-0.4120155976077827D-12	

. Par (BAIR)

$$\epsilon = 1.10^{-11}$$

0.999 <u>4</u> 739140631613D+00	-0.4057399311364921D-03
0.999 <u>4</u> 739140631613D+00	0.4057399311364921D-03
0.1000 <u>3</u> 99532422931D+01	-0.4682423362395300D-03
0.1000 <u>3</u> 99532422931D+01	0.4682423362395300D-03
0.1999 <u>5</u> 85985829890D+01	-0.7172814938434171D-03
0.1999 <u>5</u> 85985829890D+01	0.7172814938434171D-03
0.2000 <u>8</u> 28029826195D+01	0.0
0.2999 <u>9</u> 88119304596D+01	0.0
0.30000 <u>1</u> 1880798961D+01	0.0
0.399999999999 <u>4</u> 533D+01	0.0

$$P_{24} : (z^2+z+2)^4 (z^2+z+3)^4$$

Proposé par JARRATT-GARSDIE-MACK [23]

Les coefficients sont :

1, 8, 48, 196, 664, 1800, 4198, 8208, 13992, 20228, 25480, 26904, 24385,
17688, 10584, 4320, 1296

Les racines sont : $-0.5 \pm 1.322\ 875\ 655\ 532\ 295\ \underline{3}$ i de multiplicité 4
 $-0.5 \pm 1.658\ 312\ 395\ 177\ 699\ \underline{9}$ i de multiplicité 4

Résultats :

. Par (MOT) $\varepsilon = 1.10^{-13}$

-0.5000000000000000D+00	0.1320312500000000D+01
-0.5000000000000000D+00	-0.1320312500000000D+01
-0.5000000000000000D+00	-0.1656250000000000D+01
-0.5000000000000000D+00	0.1656250000000000D+01
-0.5000000000000000D+00	-0.1325469970703125D+01
-0.5000000000000000D+00	0.1325469970703125D+01
-0.5000000000000000D+00	0.1660400390625000D+01
-0.5000000000000000D+00	-0.1660400390625000D+01
-0.4974212050437927D+00	-0.1322860062122345D+01
-0.4974212050437927D+00	0.1322860062122345D+01
-0.4979243874549866D+00	-0.1658299565315247D+01
-0.4979243874549866D+00	0.1658299565315247D+01
-0.5025787954218686D+00	0.1322860085871071D+01
-0.5025787954218686D+00	-0.1322860085871071D+01
-0.5020756120793521D+00	0.1658299628179520D+01
-0.5020756120793521D+00	-0.1658299628179520D+01

. Par (NEWS) $\varepsilon = 1.10^{-12}$

-0.4995680265415233D+00	0.1321744645468514D+01
-0.4995680265415233D+00	-0.1321744645468514D+01
-0.5004382672390789D+00	0.1324010255263532D+01
-0.5004382672390789D+00	-0.1324010255263532D+01
-0.4997286963778238D+00	0.1322717181902593D+01
-0.4997728776628196D+00	-0.1322490642598818D+01
-0.5002764150346256D+00	0.1323040754023320D+01
-0.5002331229520318D+00	-0.1323268851927812D+01
-0.4956800361468187D+00	0.1640495343317899D+01
-0.4957862671167273D+00	-0.1639956057784223D+01
-0.5174464757296913D+00	0.1654815402457485D+01
-0.5037239988109292D+00	-0.1675525007707129D+01
-0.4830238569567796D+00	0.1662875366041204D+01
-0.5179486624936313D+00	-0.1654960866884743D+01
-0.5038382263127952D+00	0.1675053245980884D+01
-0.4825287768441207D+00	-0.1662795866820659D+01

. Par (NP) $\epsilon = 1.10^{-12}$

Multiplicité
trouvée

-0.4996694817683105D+00	0.1322454961584400D+01	4
-0.4996694817683105D+00	-0.1322454961584400D+01	4
-0.4999828454290546D+00	0.1322873893497599D+01	
-0.5000152956091210D+00	-0.1322965516736958D+01	
-0.5005389598987635D+00	0.1322793903392634D+01	
-0.5001866808573455D+00	-0.1323107967018338D+01	
-0.4998087779502213D+00	0.1323379851483455D+01	
-0.5001305505328187D+00	-0.1322974622480596D+01	
-0.5000253681528003D+00	0.1658888246558142D+01	4
-0.5001980552239772D+00	-0.1659213752577126D+01	4
-0.4999626249965152D+00	0.1658250850505962D+01	
-0.4998988851560645D+00	-0.1658205216242447D+01	
-0.5000020732380167D+00	0.1658104137509405D+01	
-0.4999355549532765D+00	-0.1657956434261827D+01	
-0.5000097962161451D+00	0.1658006153765807D+01	
-0.4999655682492569D+00	-0.1657873527395713D+01	

En utilisant les résultats de I.2. nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 z_1 &= -0.500 \ 000 \ 016 + 1.322 \ 875 \ 652 \ i \text{ de multiplicité } 4 \\
 z_2 &= -0.500 \ 000 \ 5 - 1.322 \ 875 \ 76 \ i - 4 \\
 z_3 &= -0.499 \ 999 \ 96 + 1.658 \ 312 \ 34 \ i - 4 \\
 z_4 &= -0.499 \ 999 \ 5 - 1.658 \ 312 \ 2 \ i - 4
 \end{aligned}$$

. Par (LAGP) $\epsilon = 1.10^{-12}$

Multiplicité
trouvée

-0.4999913784119047D+00	-0.1322880764772771D+01	4
-0.4999913784119047D+00	0.1322880764772771D+01	4
-0.4999913784119047D+00	-0.1322880764772771D+01	
-0.4999913784119047D+00	0.1322880764772771D+01	
-0.4999913784119047D+00	-0.1322880764772771D+01	
-0.4999870029642843D+00	0.1322854038666834D+01	
-0.5000258595752146D+00	-0.1322860324960324D+01	
-0.5000302455104650D+00	0.1322887051044450D+01	
-0.5000222566123142D+00	-0.1658324739672824D+01	4
-0.5000222566123142D+00	0.1658324739672824D+01	4
-0.5000222566123142D+00	-0.1658324739672824D+01	
-0.5001716462727816D+00	0.1658301451352421D+01	
-0.5000092018530174D+00	-0.1658266566715476D+01	
-0.4998949233655011D+00	0.1658157588016400D+01	
-0.4999462899881872D+00	-0.1658333537432121D+01	
-0.499911685740815D+00	0.1658465804473411D+01	

$$\begin{aligned}
 z_1 &= -0.499 \ 999 \ 998 - 1.322 \ 875 \ 654 \ 8 \ i \text{ de multiplicité } 4 \\
 z_2 &= -0.500 \ 000 \ 001 + 1.322 \ 875 \ 654 \ 8 \ i - 4 \\
 z_3 &= -0.500 \ 000 \ 001 - 1.658 \ 312 \ 395 \ 8 \ i - 4 \\
 z_4 &= -0.499 \ 999 \ 998 + 1.658 \ 312 \ 395 \ 8 \ i - 4
 \end{aligned}$$

. Par (MUL) $\epsilon = 1.10^{-12}$

1	-0.4992560819223307D+00	0.1660563964457954D+01
2	-0.4992560819223307D+00	-0.1660563964457954D+01
3	-0.4977210726437367D+00	0.1657573239691763D+01
4	-0.4977210726437367D+00	-0.1657573239691763D+01
5	-0.5007673842100466D+00	0.1656028843027305D+01
6	-0.5007673842100466D+00	-0.1656028843027305D+01
7	-0.5022554842993855D+00	0.1659083526729952D+01
8	-0.5022554842993855D+00	-0.1659083526729952D+01
9	-0.4973055208485818D+00	0.1321920617346191D+01
10	-0.4973055208485818D+00	-0.1321920617346191D+01
11	-0.4990487541491068D+00	0.1325597982762405D+01
12	-0.4990487541491068D+00	-0.1325597982762405D+01
13	-0.5027176574031414D+00	0.1323798892195965D+01
14	-0.5027176574031414D+00	-0.1323798892195965D+01
15	-0.5009280445236699D+00	0.1320185136628703D+01
16	-0.5009280445236699D+00	-0.1320185136628703D+01

. Par (INTP)

$\epsilon = 1.10^{-12}$

Mult. trouvée

-0.5000011761490172D+00	0.1322883837500773D+01	4
-0.5000011761490172D+00	-0.1322883837500773D+01	4
-0.5000011761490172D+00	0.1322883837500773D+01	
-0.5000011761490172D+00	-0.1322883837500773D+01	
-0.5000011761490172D+00	0.1322883837500773D+01	
-0.5000011761490172D+00	-0.1322883837500773D+01	
-0.4999964727765012D+00	0.1322851113480106D+01	
-0.4999964727765012D+00	-0.1322851113480106D+01	
-0.5000169639921060D+00	0.1658309874943683D+01	4
-0.5000169639921060D+00	-0.1658309874943683D+01	4
-0.4999944666144464D+00	0.1658310107925623D+01	
-0.4999944666144464D+00	-0.1658310107925623D+01	
-0.4999942109814707D+00	0.1658310949509894D+01	
-0.4999966695855171D+00	-0.1658314349408232D+01	
-0.4999943571876097D+00	0.1658318645126539D+01	
-0.4999918985851911D+00	-0.1658315245228200D+01	

En utilisant I.2., nous avons :

$z_1 = -0.500\ 000\ 000\ \underline{3} \pm 1.322\ 875\ 656\ \underline{5}\ i$ de multiplicité 4
 $z_2 = -0.499\ 999\ 999\ \underline{7} \pm 1.658\ 312\ 394\ \underline{4}\ i$ - 4

. Par (JARP)

$$\varepsilon = 1.10^{-12}$$

Multiplicité
trouvée

-0.4999480521692315D+00	0.1322918882093138D+01	4
-0.4999480521692315D+00-0.1322918882093138D+01		4
-0.4999480521692315D+00	0.1322918882093138D+01	
-0.4999480521692315D+00-0.1322918882093138D+01		
-0.4999907820220840D+00	0.1322759046733821D+01	
-0.4999907820220840D+00-0.1322759046733821D+01		
-0.5001131136103427D+00	0.1322905811072369D+01	
-0.5001131136103427D+00-0.1322905811072369D+01		
-0.4999997228654940D+00	0.1658312425343237D+01	4
-0.4999997228654940D+00-0.1658312425343237D+01		4
-0.4999997228654940D+00	0.1658312425343237D+01	
-0.4999997228654940D+00-0.1658312425343237D+01		
-0.4999997228654940D+00	0.1658312425343237D+01	
-0.4999997228654940D+00-0.1658312425343237D+01		
-0.5000008314326275D+00	0.1658312304800305D+01	
-0.5000008314326269D+00-0.1658312304800305D+01		

En utilisant I.2., nous avons :

$$z_1 = -0.499\ 999\ 999\ 992 \pm 1.322\ 875\ 655\ 48\ i \text{ de multiplicité } 4$$

$$z_2 = -0.500\ 000\ 000\ 007 \pm 1.658\ 312\ 395\ 20\ i \quad - \quad 4$$

. Par (J.G.M.)

$$\varepsilon = 1.10^{-12}$$

1	-0.4999974120679045D+00	0.1322895659182456D+01
2	-0.4999974120679045D+00-0.1322895659182456D+01	
3	-0.4999974120679045D+00	0.1322895659182456D+01
4	-0.4999974120679045D+00-0.1322895659182456D+01	
5	-0.5000152992052854D+00	0.1658328203763221D+01
6	-0.5000152992052854D+00-0.1658328203763221D+01	
7	-0.5000152992052854D+00	0.1658328203763221D+01
8	-0.5000152992052854D+00-0.1658328203763221D+01	
9	-0.4999742964548139D+00-0.1322851996510813D+01	
10	-0.4999742964548139D+00	0.1322851996510813D+01
11	-0.5000308794082423D+00	0.1322859307253277D+01
12	-0.5000308794082423D+00-0.1322859307253277D+01	
13	-0.5000070603992460D+00-0.1658274948578303D+01	
14	-0.5000070603992460D+00	0.1658274948578303D+01
15	-0.4999623411913174D+00	0.1658318224606323D+01
16	-0.4999623411913174D+00-0.1658318224606323D+01	

. Par (BAIR)

$$\varepsilon = 1.10^{-12}$$

-0.4996555267305389D+00	-0.1321919840594082D+01
-0.4996555267305389D+00	0.1321919840594082D+01
-0.4997324051019184D+00	-0.1322775214424089D+01
-0.4997324051019184D+00	0.1322775214424089D+01
-0.4996597726537250D+00	-0.1323109951762820D+01
-0.4996597726537250D+00	0.1323109951762820D+01
-0.5008201611757199D+00	-0.1322912506608742D+01
-0.5008201611757199D+00	0.1322912506608742D+01
-0.5039159826644373D+00	-0.1656661164384203D+01
-0.5039159826644373D+00	0.1656661164384203D+01
-0.4987949245886415D+00	-0.1655640292417779D+01
-0.4987949245886415D+00	0.1655640292417779D+01
-0.4973003859454588D+00	-0.1659506543822191D+01
-0.4973003859454588D+00	0.1659506543822191D+01
-0.5012202185062224D+00	-0.1661022889908581D+01
-0.5012202185062224D+00	0.1661022889908581D+01

ANNEXE 3

$$P_{31} : z^4 - 4.03z^3 + 6.0902z^2 - 4.0904z + 1.0302 = 0$$

Les solutions sont : 1, 1, 1.01, 1.02

Résultats : Valeurs initiales = 0

. Par (LEHM) $\epsilon = 1.10^{-5}$

LES RACINES SONT

0.9999988456624836D+00	0.6121246458488323D-17
0.1009999999744561D+01	0.2827121591148434D-20
0.1000001154531944D+01	-0.6123366799625547D-17
0.10200000000061011D+01	-0.7067804539237294D-21

. Par (MOT) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.1000000000000000D+01	0.0
0.1000000000000000D+01	0.0
0.1020000000004075D+01	0.0
0.1009999999995925D+01	0.0

. Par (NP) $\epsilon = 1.10^{-13}$

Multiplicité trouvée

0.9999951085248225D+00	0.0
0.1000004895062614D+01	0.0
0.10099999995219648D+01	0.0
0.1020000001192915D+01	0.0

2

$\epsilon = 1.10^{-14}$

Multiplicité trouvée

0.1000000100391204D+01	0.0
0.9999998996016303D+00	0.0
0.1010000000015420D+01	0.0
0.1019999999991744D+01	0.0

2

. Par (LAGP) $\epsilon = 1.10^{-13}$

Multiplicité trouvée

0.1000000051214577D+01 0.0
 0.9999999487812832D+00 0.0
 0.1010000000008679D+01 0.0
 0.1019999999995460D+01 0.0

2

. Par (MUL) $\epsilon = 1.10^{-13}$

1 0.9999881623108984D+00-0.7065627375057192D-06
 2 0.1000011858539839D+01 0.7090786070960384D-06
 3 0.1009999972286428D+01-0.3354458615860330D-08
 4 0.1020000006862834D+01 0.8385890255410773D-09

. Par (J4) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.9999889279947355D+00 0.0
 0.1000011090420674D+01 0.0
 0.1009999975448648D+01 0.0
 0.1020000006135942D+01 0.0

. Par (INTP) $\epsilon = 1.10^{-13}$ Valeurs initiales = 0 et 0.5

0.9996266083822318D+00 0.0
 0.1000395589130203D+01 0.0
 0.1009970446951735D+01 0.0
 0.1020007355535829D+01 0.0

. Par (J.G.M.) $\epsilon = 1.10^{-13}$

1 0.1010000000115008D+01-0.1657066549458018D-08
 2 0.1000000013289584D+01 0.5049565871705886D-06
 3 0.9999999866402368D+00-0.5041273816232746D-06
 4 0.1019999999955171D+01 0.8278610021440766D-09

. Par (BAIR) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.9999992727765843D+00 0.0
 0.1000000727300903D+01 0.0
 0.1009999999897968D+01 0.0
 0.1020000000024544D+01 0.0

$$P_{32} : z^4 - 4.003z^3 + 6.009002z^2 - 4.009004z + 1.003002 = 0$$

Les solutions sont : 1, 1, 1.001, 1.002

Résultats : Valeurs initiales = 0

. Par (LEHM) $\epsilon = 1.10^{-5}$

LES RACINES SONT

0.1001999890530134D+01	-0.4593538630484876D-24
0.9998784194995428D+00	0.5059472966933347D-15
0.1000138611713985D+01	-0.6618323757748687D-15
0.1000983078250338D+01	0.1558850795408878D-15

. Par (NP) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.9998299773449960D+00	0.0
0.1000232627912163D+01	0.0
0.1000919683431749D+01	0.0
0.1002017711311091D+01	0.0

$\epsilon = 1.10^{-15}$

Multiplicité trouvée

0.9999966941752349D+00	0.0	2
0.1000003321935251D+01	0.0	
0.1000999978761814D+01	0.0	
0.1002000005127700D+01	0.0	

. Par (HAL) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.9998733193365470D+00	0.0
0.1000157309133235D+01	0.0
0.1000959984800835D+01	0.0
0.1002009386729382D+01	0.0

. Par (LAGP) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.9998624553431324D+00 0.0
 0.1000174756074565D+01 0.0
 0.1000951543515969D+01 0.0
 0.1002011245066334D+01 0.0

$\epsilon = 1.10^{-15}$

0.1000008242460525D+01 0.0
 0.9999918581994240D+00 0.0
 0.1000999865803950D+01 0.0
 0.1002000033536101D+01 0.0

. Par (MUL) $\epsilon = 1.10^{-13}$

1	0.1001002100469712D+01-0.8848900960617191D-05
2	0.1000040977667770D+01 0.5623580345401781D-04
3	0.9999574195424143D+00-0.4961272790864043D-04
4	0.1001999502320103D+01 0.2225825415239810D-05

. Par (J4) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.9998160234772786D+00	0.0
0.1000260955585810D+01	0.0
0.1000902033426245D+01	0.0
0.1002020987510665D+01	0.0

$\epsilon = 1.10^{-15}$

0.9999900458957467D+00	0.0
0.1000010104670401D+01	0.0
0.1000999799484043D+01	0.0
0.1002000049949809D+01	0.0

. Par (J.G.M.) $\epsilon = 1.10^{-13}$

1	0.1001007569312361D+01-0.1837421723008777D-04
2	0.1000052413439695D+01 0.8970493777135457D-04
3	0.9999418037747562D+00-0.7602841008724061D-04
4	0.1001998213473188D+01 0.4697689545973813D-05

$\epsilon = 1.10^{-15}$

1	0.1001000372659478D+01-0.2670655926059988D-06
2	0.1000004504964711D+01 0.1448929677498470D-04
3	0.9999952159904594D+00-0.1428900062798188D-04
4	0.1001999906385352D+01 0.6676944560317804D-07

. Par (BAIR) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.9999997552740120D+00	-0.1805506745618187D-04
0.9999997552740120D+00	0.1805506745618187D-04
0.1001000652983519D+01	0.0
0.1001999836357561D+01	0.0

$$P_{33} : z^4 - 4.0003z^3 + 6.00090002z^2 - 4.00090004z + 1.00030002 = 0$$

Les solutions sont : 1, 1, 1.0001, 1.0002

Résultats : Valeurs initiales = 0

. Par (LEHM) $\epsilon = 1.10^{-5}$

LES RACINES SONT

0.9987966796360792D+00	-0.2788904623022700D-15
0.1001353435587462D+01	0.2788398624651850D-15
0.1000074942388212D+01	0.1272988710703711D-02
0.1000074942388246D+01	-0.1272988710703711D-02

. Par (NP) $\epsilon = 1.10^{-15}$

0.1000061438826000D+01	0.0
0.1000061438826000D+01	0.0
0.1000061438826000D+01	0.0
0.1000115683522001D+01	0.0

. Par (LAGP) $\epsilon = 1.10^{-15}$

0.9999314055512822D+00	0.0
0.1000068969904102D+01	-0.9332860597327448D-04
0.1000068969904102D+01	0.9332860597327448D-04
0.1000230654640513D+01	0.0

. Par (MUL) $\epsilon = 1.10^{-15}$

1	0.1000213643504743D+01	0.4420068386881106D-04
2	0.1000146675572035D+01	-0.8326801802467737D-04
3	0.9999967396343907D+00	0.9292714944864908D-04
4	0.9999429412888310D+00	-0.5385981529278276D-04

. Par (J4) $\epsilon = 1.10^{-15}$

0.9999694733392180D+00	0.0
0.1000072233938764D+01	0.0
0.1000056714271431D+01	0.0
0.1000201578450587D+01	0.0

. Par (J.G.M.) $\epsilon = 1.10^{-13}$

1	0.1000074974686507D+01-0.7656964870293375D-08
2	0.1000074974686507D+01 0.7656964870293375D-08
3	0.1000074974681956D+01-0.1531671748503515D-07
4	0.1000075075945029D+01 0.1531671748503515D-07

. Par (BAIR) $\epsilon = 1.10^{-15}$

0.9999669670089825D+00	-0.5799747821431827D-04
0.9999669670089825D+00	0.5799747821431827D-04
0.1000172746375901D+01	-0.4647437294396025D-04
0.1000172746375901D+01	0.4647437294396025D-04

$$P_{34} : z^4 - 3.58z^3 + 4.8059z^2 - 2.867222z + 0.6414408 = 0$$

Proposé par KORGANOFF [26]

Les solutions sont : 0.88, 0.89, 0.90, 0.91

Résultats : Valeurs initiales = 0

. Par (LEHM) $\epsilon = 1.10^{-4}$

LES RACINES SONT

0.8899999999 <u>4</u> 40896D+00	0.3251986754450626D-33
0.9000000000 <u>5</u> 93052D+00	-0.3254150398740109D-33
0.9099999999 <u>7</u> 90573D+00	0.1085438028228186D-33
0.8800000000 <u>1</u> 75475D+00	-0.1083274383938704D-33

. Par (MOT) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.889999999 <u>8</u> 56948853D+00	0.0
0.90000000 <u>1</u> 43423676D+00	0.0
0.90999999 <u>5</u> 2086364D+00	0.0
0.88000000 <u>4</u> 7541105D+00	0.0

. Par (NP) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.8800000000 <u>3</u> 69551D+00	0.0
0.889999999 <u>7</u> 553916D+00	0.0
0.9000000000 <u>3</u> 769695D+00	0.0
0.909999999 <u>8</u> 306833D+00	0.0

. Par (HAL) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.8799999999 <u>8</u> 88999D+00	0.0
0.8900000000 <u>1</u> 38042D+00	0.0
0.9000000000 <u>5</u> 4864D+00	0.0
0.9099999999 <u>1</u> 8089D+00	0.0

. Par (LAGP) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.8799999999411595D+00
 0.89000000001716347D+00
 0.89999999998333703D+00
 0.9100000000538351D+00

. Par (MUL) $\epsilon = 1.10^{-13}$

1	0.8899999999 <u>0</u> 74198D+00	-0.1041464471187413D-09
2	0.9000000000 <u>1</u> 145567D+00	0.5606653170961838D-12
3	0.9099999999 <u>5</u> 44666D+00	0.3434170516906485D-10
4	0.8800000000 <u>2</u> 35565D+00	0.6924407663258030D-10

. Par (J4) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.8800000000 <u>0</u> 206121D+00	0.0
0.8899999999 <u>3</u> 45802D+00	0.0
0.9000000000 <u>6</u> 91003D+00	0.0
0.9099999999 <u>7</u> 57070D+00	0.0

. Par (INTP) $\epsilon = 1.10^{-13}$ Valeurs initiales = 0 et 0.5

0.8800000000 <u>3</u> 96670D+00	0.0
0.8899999999 <u>8</u> 789880D+00	0.0
0.9000000000 <u>1</u> 230637D+00	0.0
0.9099999999 <u>5</u> 82811D+00	0.0

. Par (BAIR) $\epsilon = 1.10^{-13}$

0.8800000000 <u>0</u> 247609D+00	0.0
0.8899999999 <u>2</u> 29195D+00	0.0
0.9000000000 <u>7</u> 29854D+00	0.0
0.9099999999 <u>7</u> 47079D+00	0.0

. P_{35} : Polynôme du 16ème degré (Proposé par OLVER [40] et WILKINSON [55])

dont les coefficients sont :

1250162561, 385455882, 845947696, 240775148, 247926664, 64249356, 41018752,
9490840, 4178260, 837860, 267232, 44184, 10416, 1288, 224, 16, 2

Les solutions données par [55] sont :

- 0. 018 694 995 344 576 2 ±	0. 253 045 681 877 088 5 i
- 0. 002 320 944 610 861 7 ±	0. 292 583 745 103 380 8 i
- 0. 000 491 453 599 303 8 ±	0. 304 182 393 025 528 1 i
- 0. 000 142 641 089 732 1 ±	0. 308 612 124 215 863 9 i
- 0. 000 047 131 110 293 8 ±	0. 310 661 847 880 804 2 i
- 0. 000 014 838 457 209 3 ±	0. 311 696 304 687 558 1 i
- 0. 000 003 052 975 113 4 ±	0. 312 196 968 372 284 7 i
- 0. 132 447 246 990 246 2 ±	0. 136 005 507 951 377 6 i

Résultats :

. Par (NEWS) $\epsilon = 1.10^{-13}$

-0.2954711903890423D-05	0.3121968061262292D+00
-0.2954711903890423D-05	-0.3121968061262292D+00
-0.1503500168097272D-04	0.3116966076306993D+00
-0.1503500168097272D-04	-0.3116966076306993D+00
-0.4699883239151048D-04	0.3106616702191933D+00
-0.4699878862207670D-04	-0.3106616704882508D+00
-0.1426792942537271D-03	0.3086121637382414D+00
-0.1426793524516147D-03	-0.3086121632697540D+00
-0.4914492586319752D-03	0.3041823904769492D+00
-0.4914492486036077D-03	-0.3041823907073263D+00
-0.2320944743965137D-02	0.2925837450934543D+00
-0.2320944738944229D-02	-0.2925837450618142D+00
-0.1869499534425979D-01	0.2530456818777404D+00
-0.1869499534489016D-01	-0.2530456818784415D+00
-0.1324472469902474D+00	0.1360055079513795D+00
-0.1324472469902417D+00	-0.1360055079513713D+00

. Par (HAL)

$$\epsilon = 1.10^{-13}$$

-0.3810108797775197D-04	0.3122055041022566D+00
-0.3810108797775197D-04	-0.3122055041022566D+00
0.5416677142524478D-04	0.3116861722772509D+00
0.5416677142524478D-04	-0.3116861722772509D+00
-0.9123944555345481D-04	0.3106639772481891D+00
-0.9123944555345481D-04	-0.3106639772481891D+00
-0.1314777128849981D-03	0.3086116715884219D+00
-0.1314777036036068D-03	-0.3086116715884219D+00
-0.4924892934059694D-03	0.3041823037479899D+00
-0.4924893071455462D-03	-0.3041823037393645D+00
-0.2320921036080500D-02	0.2925837544153013D+00
-0.2320921031411800D-02	-0.2925837544193369D+00
-0.1869499538271047D-01	0.2530456817828536D+00
-0.1869499538291829D-01	-0.2530456817823402D+00
-0.1324472469901513D+00	0.1360055079515439D+00
-0.1324472469901483D+00	-0.1360055079515635D+00

. Par (LAGP)

$$\epsilon = 1.10^{-13}$$

-0.1869499534456870D-01	-0.2530456818772594D+00
-0.1869499534456870D-01	0.2530456818772594D+00
-0.2320944759416687D-02	-0.2925837450640604D+00
-0.2320944797440011D-02	0.2925837449176949D+00
-0.4914443324115296D-03	-0.3041823926339721D+00
-0.4914388816234912D-03	0.3041824006909542D+00
-0.1427549335640257D-03	-0.3086121414717148D+00
-0.1428362640720473D-03	0.3086120493732635D+00
-0.4665499690742229D-04	-0.3106617513546718D+00
-0.4628607138323436D-04	0.3106621211765042D+00
-0.1562611845262240D-04	-0.3116964838935818D+00
-0.1625821054243577D-04	0.3116958841724208D+00
-0.2636701769099185D-05	-0.3121968688672485D+00
-0.2297617459637939D-05	0.3121971829544119D+00
-0.1324472469902463D+00	-0.1360055079513773D+00
-0.1324472469902467D+00	0.1360055079513774D+00

. Par (MUL) $\epsilon = 1.10^{-13}$

1	-0.1507753016711241D-04	-0.3116968149813309D+00
2	-0.1507753016711241D-04	0.3116968149813309D+00
3	-0.2933963132428146D-05	-0.3121966966105864D+00
4	-0.2933963132428146D-05	0.3121966966105864D+00
5	-0.1426884786491399D-03	-0.3086121939157760D+00
6	-0.1426884786491483D-03	0.3086121939157760D+00
7	-0.4696894552272682D-04	-0.3106615446520513D+00
8	-0.4696894552275305D-04	0.3106615446520513D+00
9	-0.4914481461736957D-03	-0.3041823879897474D+00
10	-0.4914481461736380D-03	0.3041823879897474D+00
11	-0.2320944779228285D-02	-0.2925837451352676D+00
12	-0.2320944779228440D-02	0.2925837451352675D+00
13	-0.1869499534421631D-01	-0.2530456818777504D+00
14	-0.1869499534421658D-01	0.2530456818777506D+00
15	-0.1324472469902470D+00	-0.1360055079513763D+00
16	-0.1324472469902459D+00	0.1360055079513761D+00

. Par (J4) $\epsilon = 1.10^{-13}$

-0.3414799337673242D-05	0.3121967285842126D+00
-0.3414799337673242D-05	-0.3121967285842126D+00
-0.1414961746197364D-04	0.3116967705347179D+00
-0.1414961746197364D-04	-0.3116967705347179D+00
-0.4755315678892578D-04	0.3106615509125873D+00
-0.1425372348741953D-03	0.3086122028817443D+00
-0.4755291682913839D-04	-0.3106615509030818D+00
-0.1425376472816906D-03	-0.3086122028847933D+00
-0.4914625935329992D-03	0.3041823850399200D+00
-0.4914623961773347D-03	-0.3041823850520461D+00
-0.2320944440576541D-02	0.2925837453332696D+00
-0.2320944465926510D-02	-0.2925837453271722D+00
-0.1869499534451574D-01	0.2530456818760562D+00
-0.1869499534407186D-01	-0.2530456818764865D+00
-0.1324472469902485D+00	0.1360055079513789D+00
-0.1324472469902500D+00	-0.1360055079513763D+00

. Par (INTP)

$$\varepsilon = 1.10^{-13}$$

-0.1869499534451396D-01-0.2530456818771450D+00
-0.1869499534451396D-01 0.2530456818771450D+00
-0.2320944617465744D-02 0.2925837450611285D+00
-0.2320944617465744D-02-0.2925837450611285D+00
-0.4914525912655260D-03-0.3041823956811663D+00
-0.4914525912655260D-03 0.3041823956811663D+00
-0.1426575692120438D-03 0.3086120917903628D+00
-0.1426573954044587D-03-0.3086120917178997D+00
-0.4705446609239074D-04-0.3106619832498096D+00
-0.1324472469902460D+00-0.1360055079513773D+00
-0.2978882381616624D-05 0.3121970854168402D+00
-0.2980275206149250D-05-0.3121970860683421D+00
-0.1497490925816940D-04 0.3116960826184382D+00
-0.1497249714212550D-04-0.3116960815070173D+00
-0.4705327299347487D-04 0.3106619827174274D+00
-0.1324472469902459D+00 0.1360055079513774D+00

. Par (J.G.M.)

$$\varepsilon = 1.10^{-13}$$

1 -0.1324472469902462D+00 0.1360055079513776D+00
2 -0.1324472469902462D+00-0.1360055079513776D+00
3 -0.4914445853298545D-03 0.3041823869400799D+00
4 -0.4914445853298545D-03-0.3041823869400799D+00
5 -0.4666700183578642D-04-0.3106613570964334D+00
6 -0.4666700183578642D-04 0.3106613570964334D+00
7 -0.2320944717001338D-02 0.2925837450926574D+00
8 -0.2320944717001338D-02-0.2925837450926574D+00
9 -0.2650316996011827D-05-0.3121965029554198D+00
10 -0.2650316996011827D-05 0.3121965029554198D+00
11 -0.1869499534550251D-01 0.2530456818773660D+00
12 -0.1869499534550251D-01-0.2530456818773660D+00
13 -0.1560219225967211D-04-0.3116971630093885D+00
14 -0.1560219225967211D-04 0.3116971630093885D+00
15 -0.1427530281650770D-03 0.3086122281911656D+00
16 -0.1427530281650770D-03-0.3086122281911656D+00

. Par (BAIR)

$$\epsilon = 1.10^{-13}$$

-0.1869499534463326D-01	-0.2530456818772721D+00
-0.1869499534463326D-01	0.2530456818772721D+00
-0.2320944728125693D-02	-0.2925837450254278D+00
-0.2320944728125693D-02	0.2925837450254278D+00
-0.4914448728847958D-03	-0.3041823954703839D+00
-0.4914448728847958D-03	0.3041823954703839D+00
-0.1427551752601603D-03	-0.3086121061256826D+00
-0.1427551752601603D-03	0.3086121061256826D+00
-0.1324472469902464D+00	-0.1360055079513775D+00
-0.1324472469902464D+00	0.1360055079513775D+00
-0.4664100895353214D-04	-0.3106618988044232D+00
-0.4664100895353214D-04	0.3106618988044232D+00
-0.1565937762388091D-04	-0.3116962406681678D+00
-0.1565937762388091D-04	0.3116962406681678D+00
-0.2616684665333325D-05	-0.3121969971776673D+00
-0.2616684665333325D-05	0.3121969971776673D+00

Bibliographie

- [1] BACHMANN K.H. Lösung algebraischer Gleichungen nach der Methode des stärksten Abstiegs.
Z. Angew. Math. Mech. 40, p. 132-135 (1960)
- [2] BAIRSTOW L. Reports and Memoranda.
n° 154 of Advisory Committee for Aeronautics (1914)
- [3] BALFOUR, MAC TERNAN Numerical solution of equations
H.E.B. London 1967
- [4] BAREISS E.H. Resultant procedure and the Mechanization of the Graeffe Process.
J. of A.C.M. Vol 7 (1960)
- [5] BODEWIG E. On types of convergence and on their behavior of approximations in the neighborhood of a multiple root of an equation.
Akad. Wetensch. Proc. (Amst.) p. 325-333 (1948)
- [6] BRACHOLD C. Ein simultanes Verfahren zur Lösung algebraischer Gleichungen.
Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden 17 (1968)
- [7] DEKKER T.J. Newton-Laguerre iteration.
Prog. en Math. Numerique. C.N.R.S. Besançon (1966)
- [8] - Finding a zero by means of successive linear interpolation.
Constructive aspects of the fundamental theorem of algebra.
Ed. Dejeon-Henrici Wiley 1969
- [9] DEJEON, NICKEL A never failing, fast convergent root-finding algorithm.
Constructive aspects of the fundamental theorem of algebra.
Wiley 1969

- [10] DELONE Algebra : theory of algebraic equations.
Mathematics : its content, methods and meaning.
ed : Aleksandrow . MIT Press p.261-310 1964
- [11] DELVES L.M., LYNESS J.N. A numerical method for locating the zeros
of an analytic function.
Math. computer Vol 21 (1967) p. 543-560
- [12] DIMSDALE On Bernoulli's method for solving algebraic equations
Quart. Appl. Maths. Vol 6 p.77 (1948)
- [13] DURAND E. Solutions numériques des équations algébriques.
Masson 1960
- [14] DVORCUK Factorization of a polynomial into quadratic factors
by Newton method.
Aplikace Matematiky svazek 14 (1969)
- [15] EHRLICH L.W. A modified Newton method for polynomials .
Comm. ACM Vol. 10 n°2 Feb.(1967)
- [16] HENRICI P. Elements of numerical analysis.
Wiley 1964
- [17] HENRICI P., WATKINS B.O. Finding zeros of a polynomial by the Q.D.
algorithm.
Comm. ACM Vol. 8 n° 9 sep.(1965)
- [18] JAIN, KRISHAN R. Higher order Bairstow method for solving polynomial
equation.
Kleine Mitteilungen Zamm. 51 p. 51-52 (1971)
- [19] JARRATT P. A rational iteration function for solving equations.
Computer J. Vol. 9 n° 3 (1966)
- [20] - Multipoint iterative methods for solving certain
equations.
Computer J. Vol. 8 (1966)
- [21] - The use of comparison series in analysing iteration
functions.
Computer J. Vol 11 n°3 nov(1968)
- [22] - Some efficient fourth order multipoint methods for
solving equations.
BIT 9 (1969)
- [23] JARRATT, GARSIDE, MACK A new method for solving polynomial equations.
Computer J. Vol 11 n°1 mai (1968)

- [24] JARRATT, NUDDS The use of rational functions in the iterative solution of equations on a digital computer.
Computer. J. Vol 8 mai (1965)
- [25] KERNER I.O. Ein Gesamtschnitt verfahren zur Berechnung der Nustellen von Polynomen.
Numerische Mathematik 8 p. 290-294 (1966)
- [26] KORGANOFF A. Méthodes de calcul numérique.
Dunod 1961
- [27] LAGOUANELLE J.L. Sur une méthode de calcul de l'ordre de multiplicité des zéros d'un polynôme.
C.R. Acad. des Sciences. Paris mars (1966)
- [28] LAGUERRE Sur une méthode pour obtenir par approximation les racines d'une équation algébrique qui a toutes ses racines réelles.
Oeuvres de Laguerre 1 p. 87-103 , Gauthier-Villars 1898
- [29] LANCASTER P. Error analysis for the Newton-Raphson method.
Num. Math. 9 p.55-68 (1966)
- [30] LANCE G.N. Solution of algebraic and transcendental equations on an automatic digital computer.
J. of ACM Vol 6 p.97-101 (1959)
- [31] LANCZOS C. Applied Analysis
Su Isaac Pitman and Sons, LDT, 1957
- [32] LEHMER D.H. Search procedures for polynomial equation solving.
Const. Aspects of the fundamental theorem of algebra edited by Dejeon, Henrici, Wiley Interscience 1969
- [33] - A machine method for solving polynomial equations
J. of ACM Vol 8 (1961)
- [34] MARDEN The geometry of the zeros.
A.M.S. 1949
- [35] MOORE J.B. A convergent algorithm for solving polynomial equations.
J. of ACM Vol 14 n° 2 (1967)
- [36] MOORE, CLARK A simple convergent algorithm for rapid solution of polynomial equations.
IEEE Transactions of computer, jan (1970)

- [37] MOTTELER Z. A simple method for finding the zeros of polynomials, based on d'Alembert's lemma.
Los Alamos Scientific Laboratory. University of California (1965)
- [38] MULLER D.E. A method for solving algebraic equations using an automatic computer.
M.T.A.C. Vol 10 (1956)
- [39] NICKEL K. Die numerische Berechnung der Wurzeln eines Polynoms.
Numerische Mathematik 9 p.80-98 (1966)
- [40] OLVER F.W.J. The evaluation of zeros of high-degree polynomials.
Philos. Trans. Roy. Soc. London, Vol 244 (1952)
- [41] OSTROWSKI A.M. Solutions of equations and systems of equations.
Academic Press. N.Y. 1966
- [42] PELTIER Résolution numérique des équations algébriques.
Gauthier-Villars
- [43] RALL L.B. Convergence of the Newton Process to multiple solutions.
Numerische Mathematik 9 p. 23-27 (1966)
- [44] RALSTON A first course in numerical analysis .
Mac Graw-Hill 1965
- [45] RAY T.L. Laguerre's method for finding complex roots.
Ph. D Stevens. Institute of Technology (1966)
- [46] RUTISHAUSER Der Quotienten-Differenzen Algorithmus.
Birkhäuser Verlag Basel/Stuttgart 1957
- [47] STIEFEL An introduction to numerical mathematics.
Academic Press 1963.
- [48] TORNHEIM Convergence of multipoint iterative methods.
J. of A.C.M. Vol 11 n° 2 April (1964)
- [49] TRAUB J.F. On Newton-Raphson iteration.
Am. Math. Monthly Vol 74 n° 8 oct (1967)
- [50] - Iterative methods for the solution of equations.
Prentice Hall 1964
- [51] - On a class of iteration formulas and some historical notes.
Comm. of the ACM
- [52] VAN DER CORPUT Sur l'approximation de Laguerre des racines d'une équation algébrique qui a toutes ses racines réelles.
Akad. Wetensch. Proc. (Amst) 49 p. 922-929 (1946)

- [53] WEGSTEIN J.H. Accelerating convergence of the iterative processes.
Comm. of the A.C.M. n° 6,9 (1958)
- [54] WEINER L.M. Note on Newton's method
Math. Magaz. Vol 39 n° 3
- [55] WILKINSON J.H. The evaluation of the zeros of ill-conditioned poly-
nomials Part II
Numerische Mathematik 1, 150-166 (1959)
- [56] - Rounding errors in algebraic Processes.
N.P.L. (1963)
- [57] WOZNIAKOWSKI Some remarks on Bairstow's method.
Zastosowania Matematyki Applicationes Mathematicae
XI, 2 (1970)
- [58] WYNN On a cubically convergent Process for dertermining
the zeros of certain functions.
